K-Theory **17:** 215–264, 1999.

La conjecture de Baum–Connes pour les feuilletages moyennables

(The Baum–Connes Conjecture for Amenable Foliations)

JEAN-LOUIS TU
Université Pierre et Marie Curie, Algèbres d'Opérateurs et Représentations, Institut de Mathématiques (UMR 7586), 4 Place Jussieu, F-75252 Paris Cedex 05, France.
e-mail: tu@math.jussieu.fr

(Received: May 1998)

Abstract. Nous démontrons, en reprenant la construction de Higson and Kasparov, la conjecture de Baum–Connes pour les feuilletages dont le groupoïde d'holonomie est séparé et moyennable. Plus généralement, pour tout groupoïde localement compact σ-compact séparé avec système de Haar G, agissant proprement et isométriquement sur un champ continu d'espaces affines Euclidiens, l'application de Baum–Connes avec coefficients est un isomorphisme, et G est moyennable en K-théorie. De plus, nous montrons que $C^*(G)$ vérifie la formule des coefficients univesels.

Abstract. We show, using the construction of Higson and Kasparov, that the Baum–Connes Conjecture holds for foliations whose holonomy groupoid is Hausdorff and amenable. More generally, for every locally compact, σ-compact and Hausdorff groupoid G acting continuously and isometrically on a continuous field of affine Euclidean spaces, the Baum–Connes conjecture with coefficients is an isomorphism, and G amenable in K-theory. In addition, we show that $C^*(G)$ satisfies the Universal Coefficient Theorem.

Mathematics Subject Classifications (1991): 19K35, 46L85, 58G12, 20L99.

Key words: C^*-algebra, equivariant *KK*-theory, foliation, Baum–Connes conjecture, Novikov conjecture, Universal coefficient theorem.

0. Introduction

Dans [24], il est démontré que pour tout groupe discret (dénombrable) Γ agissant proprement (au sens métrique) par isométries sur un espace affine Euclidien, l'application de Baum–Connes avec coefficients en E-théorie est un isomorphisme, et que pour toute C^*-algèbre B munie d'une action de Γ, l'élément canonique de $E(B\rtimes\Gamma, B\rtimes_{\text{red}}\Gamma)$ est inversible. En particulier, l'application de Baum–Connes $K_*^{\text{top}}(\Gamma) \to K_*(C_r^*(\Gamma))$ est un isomorphisme, et pour toute C^*-algèbre B munie d'une action de Γ, le morphisme canonique $K_*(B\rtimes\Gamma) \to K_*(B\rtimes_{\text{red}}\Gamma)$ est bijectif. Pour une introduction à l'application de Baum–Connes, nous renvoyons le lecteur à [9].

Le but de ce texte est de généraliser ce résultat dans plusieurs directions. Tout d'abord, comme il y a un morphisme canonique de la *KK*-théorie vers la *E*-théorie (voir [21] pour la E-théorie équivariante), la question qui se posait était de voir si l'on pouvait obtenir une preuve en KK-théorie, et en particulier obtenir la K-moyennabilité [17, 28] du groupe, ce qui est un résultat plus fort que la E-moyennabilité. D'autre part, il était souhaitable de généraliser le résultat aux groupes localement compacts non nécessairement discrets, ou même aux groupoïdes localement compacts possédant un système de Haar au sens de [39]. Nous obtenons ainsi:

THÉORÈME 0.1. *Pour tout groupoïde localement compact (σ-compact séparé) G muni d'un système de Haar agissant proprement sur un champ continu d'espaces affines Euclidiens, la conjecture de Baum–Connes avec coefficients est vérifiée et G est K-moyennable.*

(La définition de la K-moyennabilité pour les groupoïdes sera explicitée dans la section 4, Définition 4.1.) Les hypothèses sont en particulier vérifiées dans le cas d'un groupoïde moyennable, d'où la conjecture de Baum–Connes pour les feuilletages dont le groupoïde d'holonomie est séparé et moyennable (au sens de [5]). Notre résultat généralise aussi le fait que l'élément γ défini par Kasparov [30] est égal à 1 pour les groupes moyennables presques connexes ([30], Theorem 5.9), pour $G = \mathrm{SO}_0(n, 1)$ [29] et pour $G = \mathrm{SU}(n, 1)$ [27] (la K-moyennabilité pour ce dernier groupe avait été obtenue dans [19]).

L'organisation de ce travail est la suivante: nous commençons par quelques rappels sur la conjecture de Baum–Connes et la construction dual Dirac-Dirac, utilisant la *KK*-théorie équivariante par rapport à un groupoïde [35, 36].

Puis, nous discutons des liens entre la moyennabilité d'un groupoïde G et l'existence d'une action propre de G sur un champ continu d'espaces affines, et nous construisons un espace localement compact Z muni d'une action propre de G.

Notons $X = G^{(0)}$ l'ensemble des unités de G. Les deux sections suivantes expliquent comment la construction de [24] se généralise dans notre cadre: en effet, la C^*-algèbre A construite dans ([24], Section 4) est une $Z \rtimes G$-algèbre, et il est possible d'effectuer la construction 'dual Dirac-Dirac' en exhibant des éléments $\eta \in KK_G(C(X), A)$ et $D \in KK_G(A, C(X))$ qui correspondent à la construction en E-théorie de [24]. Nous montrons que le produit de Kasparov $\eta \otimes_A D$ est égal à 1 dans $KK_G(C(X), C(X))$. Enfin, nous donnons une application à la formule des coefficients universels: si G est un groupoïde localement compact (σ-compact séparé) avec système de Haar, admettant une action propre sur un champ continu d'espaces affines Euclidiens, alors $C^*(G)$ vérifie la formule des coefficients universels [42].

1. Rappels et notations

Dans tout ce qui suit, les espaces localement compacts considérés seront σ-compacts séparés. Si X est un tel espace, on notera $C(X)$ l'espace des fonctions continues tendant vers 0 à l'infini. Toutes les C^*-algèbres et les espaces Hilbertiens seront supposés séparables, sauf mention expresse du contraire.

Soit G un groupoïde localement compact muni d'un système de Haar. Nous emploierons la notation $(\lambda^x)_{x\in X}$ pour le système de Haar à gauche, et $(\rho_x)_{x\in X}$ pour le système de Haar à droite correspondant. On notera en général s et r les applications source et but de G dans $X = G^{(0)}$, $G_x = s^{-1}(x)$, $G^x = r^{-1}(x)$ [39]. L'élément neutre de G_x^x sera noté e_x, voire x.

Si A est une G-algèbre (c'est-à-dire une C^*-algèbre munie d'une action de G), la donnée d'une action de G sur un A-module Hilbertien $\mathcal{E}$ est équivalente à celle d'un isomorphisme $\alpha \in \mathcal{L}(s^*\mathcal{E}, r^*\mathcal{E})$ tel que pour tous g, h vérifiant $r(h) = s(g)$, les $\alpha_g \in \mathcal{L}(\mathcal{E}_{s(g)}, \mathcal{E}_{r(g)})$ vérifient la règle de composition $\alpha_{gh} = \alpha_g \circ \alpha_h$ (voir [35] pour plus de détails).

Si Z est un espace localement compact (séparé, etc.) muni d'une action de G, on notera $Z \rtimes G$ le groupoïde produit croisé, $C^*(Z \rtimes G)$ ou $C(Z) \rtimes G$ sa C^*-algèbre pleine, $C^*_{\mathrm{red}}(Z \rtimes G)$ ou $C(Z) \rtimes_{\mathrm{red}} G$ sa C^*-algèbre réduite (dans le cas des actions propres, $\rtimes = \rtimes_{\mathrm{red}}$). Si l'action est propre, Z/G est un espace localement compact. Z sera dit G-compact si Z/G est compact. Par ailleurs, on rappelle que G agit proprement sur Z si et seulement si le groupoïde $Z \rtimes G$ est propre (un groupoïde G est dit propre si l'application $(r, s)\colon G \to X \times X$, $g \mapsto (r(g), s(g))$ est propre).

Soit H un groupoïde propre avec système de Haar. Il existe alors une application $c\colon H^{(0)} \to [0, 1]$ telle que $\int_{H^x} c(s(h))\, \lambda^x(\mathrm{d}h) = 1$ pour tout $x \in H^{(0)}$, et que $r\colon \operatorname{supp}(c \circ s) \to H^{(0)}$ soit propre. Si $H^{(0)}/H$ est compact, la fonction $h \mapsto c(s(h))^{1/2} c(r(h))^{1/2}$ définit un élément canonique $\lambda_H \in KK(\mathbb{C}, C^*(H))$.

On a alors la généralisation du théorème de Julg (ou, si l'on préfère, l'isomorphisme de Baum–Connes avec coefficients pour les groupoïdes propres): pour toute H-algèbre A,

$$KK_H(H^{(0)}, A) \simeq KK(\mathbb{C}, A \rtimes H),$$

obtenu par la composition de j_H et de la multiplication à gauche par $\lambda_H \in K_*(C^*(H))$ [46].

2. L'application de Baum–Connes

Les définitions qui suivent sont la généralisation dans le cas des groupoïdes des définitions de [9]. Voir [46] pour un exposé plus détaillé.

Soit G un groupoïde localement compact (séparé) avec système de Haar, et $X = G^{(0)}$ l'espace des unités de G.

DÉFINITION 2.1. Soit Z un G-espace (localement compact) propre. On note, pour toute G-algèbre F,

$$RK_*^G(Z; F) = \varinjlim KK_G(C(Y), F),$$

la limite étant prise sur les parties G-compactes $Y \subset Z$. On a alors des applications canoniques

$$\begin{aligned}
&\mu\colon RK_*^G(Z;F) \to K_*(F \rtimes G)\\
&\mu_{\mathrm{red}}\colon RK_*^G(Z;F) \to K_*(F \rtimes_{\mathrm{red}} G)
\end{aligned} \tag{1}$$

définies par la composition

$$KK_G(C(Y),F) \xrightarrow{j_G} KK(C(Y)\rtimes G, F\rtimes G) \xrightarrow{\lambda_{Y\rtimes G}\otimes\cdot} K_*(F\rtimes G).$$

Notons $\mathbf{E}G$ le classifiant des actions propres de G (voir Appendice).

DÉFINITION 2.2. On définit la K-théorie topologique de G à coefficients dans une G-algèbre F par

$$K_*^{\mathrm{top}}(G;F) = RK_*^G(\mathbf{E}G;F).$$

$\mu\colon K_*^{\mathrm{top}}(G;F) \to K_*(F\rtimes G)$ s'appelle l'application de Baum–Connes.

La conjecture de Baum–Connes dit que μ_{red} est un isomorphisme.

DÉFINITION 2.3. Soit G un groupoïde localement compact et A une C^*-algèbre. On dit que G agit proprement sur A s'il existe un espace (localement compact) Z muni d'une action propre de G tel que A soit une $Z\rtimes G$-algèbre.

Remarquons que dans le cas où G est un groupe, une $Z\rtimes G$-algèbre est simplement une $G - C(Z)$-algèbre au sens de [30], Definition 1.5.

Le résultat qui suit, que l'on appelle la construction 'Dual Dirac', est prouvé dans [47] (Theorem 2.2) pour les groupes. La preuve est essentiellement la même dans le cas des groupoïdes [46]. Pour la notion de K-moyennabilité pour les groupoïdes, voir la Définition 4.1 plus bas.

THÉORÈME 2.4. *Soit G un groupoïde localement compact avec système de Haar, et $X = G^{(0)}$. On suppose qu'il existe une C^*-algèbre A munie d'une action propre de G et des éléments $\eta \in KK_G(C(X),A)$, $D \in KK_G(A,C(X))$ tels que $\eta \otimes_A D = 1 \in KK_G(C(X),C(X))$. Alors pour toute G-algèbre F, les applications μ et μ_{red} de la Définition 2.1 sont des isomorphismes, et G est K-moyennable. En particulier, l'élément canonique de $KK(F\rtimes G, F\rtimes_{\mathrm{red}} G)$ est inversible.*

3. Actions sur des champs d'espaces affines

Dans cette section, nous commençons par quelques rappels et remarques sur la moyennabilité d'un groupoïde [5], puis nous définissons la notion d'action propre d'un groupoïde sur un champ continu d'espaces affines Euclidiens, et nous montrons qu'une telle action existe si G est moyennable. Enfin, nous examinons, en suivant les lignes de [26], les liens entre les actions affines et les fonctions de type négatif.

3.1. MOYENNABILITÉ

Nous renvoyons le lecteur à [5] pour toute question concernant la moyennabilité des groupoïdes; nous nous contentons ci-dessous de rappeler les notions qui nous seront utiles.

Soit G un groupoïde localement compact (σ-compact séparé), de base X. On dit que G est moyennable [39] s'il existe $\xi_i \in C_c(G)$, $\xi_i \geqslant 0$ vérifiant

(i) $x \mapsto \int_{g\in G^x} \xi_i(g)^2\,\lambda^x(\mathrm{d}g)$ tend vers 1 uniformément sur tout compact de X;
(ii) $g \mapsto \|g(\xi_i)_{s(g)} - (\xi_i)_{r(g)}\|_{L^2(G^{r(g)})}$ tend vers 0 uniformément sur tout compact de G.

(On a noté ξ_x la restriction de ξ à G^x.) On a aussi les caractérisations équivalentes en norme L^1, ce qui se démontre par un argument standard [39]: G est moyennable si et seulement si pour tout $\epsilon > 0$, pour tout compact K de X et tout compact K' de G_K^K il existe $\xi \in C_c(G^K)$ positive vérifiant

(i) $\int_{G^x} \xi(g)\,\lambda^x(\mathrm{d}g) = 1$ pour tout $x \in K$;
(ii) $\int |\xi(g\gamma) - \xi(\gamma)|\,\mathrm{d}\lambda^{s(g)}(\gamma) < \epsilon$ pour tout $g \in K'$.

Pour éviter les confusions avec d'autres définitions de la moyennabilité [15, 48], nous dirons parfois que G est moyennable au sens fort.

Rappelons le lien avec la moyennabilité en mesure [5].

Soit (G, λ, μ) un groupoïde mesuré, où λ est un système de Haar Borélien et μ une mesure quasi-invariante sur $X = G^{(0)}$. Alors, (G, λ, μ) est dit moyennable s'il existe $\varphi_n \in L^\infty(X, L^1(G, \lambda))$ tels que

(i) $\varphi_n \geqslant 0$,
(ii) $\forall x \in X$, $\int \varphi_n(g)\,\lambda^x(\mathrm{d}g) = 1$,
(iii) $\int f(g)|\varphi_n(g^{-1}\gamma) - \varphi_n(\gamma)|\,\lambda^x(\mathrm{d}g)\,\mu(\mathrm{d}x) \to 0$, $\forall f \in L^1(G)$.

Cette définition coïncide avec celle de [15], et toutes les définitions au sens mesurable de la moyennabilité sont équivalentes.

Un groupoïde Borélien est dit moyennable en mesure si, étant donné le choix d'un système de Haar (Borélien), (G, λ, μ) est moyennable pour toute mesure quasi-invariante μ. Cette notion ne dépend pas du choix d'un systéme de Haar.

Les deux notions de moyennabilité (forte et en mesure) sont équivalentes pour de nombreux groupoïdes, y compris les groupoïdes r-discrets. Pour ces groupoïdes, on parlera simplement de 'moyennabilité'. Comme ces deux notions de moyennabilité sont invariantes par équivalence de groupoïdes, elles sont équivalentes pour tout groupoïde d'holonomie de feuilletage, à condition que ledit groupoïde soit séparé. Par conséquent, nous pourrons parler de 'feuilletages dont le groupoïde d'holonomie est séparé et moyennable' sans plus de précisions.

Enfin, soit (V, F) un feuilletage dont le groupoïde d'holonomie G associé à une transversale est séparé. Soit R la relation d'équivalence sous-jacente. La définition de la moyennabilité d'un feuilletage selon [15] est que R est moyennable (en mesure). Il résulte de [5] que la moyennabilité de G implique celle de R. En outre, si R est moyennable et G_x^x est un groupe moyennable pour tout $x \in X$, alors G est moyennable.

Examinons la question de la croissance des groupoïdes.

DÉFINITION 3.1. On appelle fonction longueur sur un groupoïde localement compact G une application continue $l: G \to \mathbb{R}_+$ vérifiant

(i) $l(e_x) = 0$ pour tout $x \in X$;
(ii) $l(g) = l(g^{-1})$ pour tout $g \in G$;
(iii) $l(gh) \leqslant l(g) + l(h)$ pour toute paire composable (g, h).

Par exemple, si Γ est le groupoïde d'holonomie d'un feuilletage (V, F) muni d'une métrique riemannienne avec V compacte, et si Γ est séparé, on définit $l(g)$ comme l'inf des longueurs des chemins dans la classe de g.

La fonction longueur permet de définir la notion de croissance polynomiale; un groupoïde à croissance polynomiale est moyennable en mesure (et par conséquent, fortement moyennable si, par exemple, G est r-discret).

3.2. ACTIONS AFFINES

DÉFINITION 3.2. Soit X un espace topologique séparé. On appelle champ continu d'espaces affines Euclidiens au-dessus de X la donnée $(H_x)_{x\in X}$ d'une famille d'espaces affines Euclidiens et d'un ensemble de sections locales de la projection canonique $p: H = \coprod_{x\in X} H_x \to X$, i.e. d'applications $\xi: U_\xi \to H$ définies sur un ouvert de X telles que $p \circ \xi = \mathrm{Id}$, satisfaisant les conditions suivantes:

(i) si $\xi \in \Gamma$, alors pour tout ouvert $V \subset U_\xi$, la restriction $\xi_{|V}$ appartient à Γ;
(ii) pour tous $\xi, \eta \in \Gamma$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, soit $U = U_\xi \cap U_\eta$; on a $\lambda\xi_{|U} + (1-\lambda)\eta_{|U} \in \Gamma$;
(iii) pour tout $x \in X$, $\{\xi(x) \mid \xi \in \Gamma,\ x \in U_\xi\}$ est dense dans H_x;
(iv) pour tous $\xi, \eta \in \Gamma$, l'application $x \mapsto \|\xi - \eta\|$ est continue sur $U_\xi \cap U_\eta$;
(v) soit $\xi: U_\xi \to H$ une section locale de p; si $\forall x \in U_\xi$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \eta \in \Gamma$, $\|\xi(y) - \eta(y)\| < \varepsilon$ pour tout y appartenant à un voisinage de x, alors $\xi \in \Gamma$.

On vérifie que la famille des espaces vectoriels sous-jacents à H_x $(x \in X)$ constitue un champ continu d'espaces vectoriels Euclidiens au sens de [18], Definition 10.1.2. En outre d'après [18], pour tout $x \in X$ et tout $\xi_x \in H_x$, il existe $\xi \in \Gamma$ tel que $\xi_x = \xi(x)$.

On définit sur H la topologie suivante: pour tout $\xi \in \Gamma$, tous $\xi \in H$ et $x \in U_\xi$, $\xi_i \to \xi(x)$ si et seulement si $p(\xi_i) \to x$ et $\|\xi_i - \xi(p(\xi_i))\| \to 0$. Pour cette topologie, Γ est exactement l'ensemble des sections locales continues de $p: H \to X$.

Dans le cas où X est localement compact (σ-compact), on note que l'existence de sections locales de p et de partitions de l'unité sur X implique l'existence d'une section globale continue. Par conséquent, on peut identifier H au champ continu d'espaces vectoriels Euclidiens sous-jacent.

Soit G un groupoïde localement compact (σ-compact séparé), de base X, H un champ continu d'espaces affines Euclidiens au-dessus de X. On dit que G agit sur H si pour tout $x, y \in X$ et tout $g \in G_x^y$, g définit une isométrie affine de H_x dans H_y, et si l'action de G sur H est continue.

Identifions H à un champ continu d'espaces vectoriels Euclidiens au moyen d'une section globale $x \mapsto a(x) \in H_x$ de p. Soit α l'action linéaire associée à l'action affine. On a $g \cdot \xi = \alpha_g(\xi) + b(g)$ où b est un cocycle, c'est-à-dire qu'il vérifie l'identité $b(gh) = \alpha_g(b(h)) + b(g)$.

Pour tout $R > 0$, notons $B_R^a = \{\xi \in H \mid \|\xi - a(p(\xi))\| \leqslant R\}$.

DÉFINITION 3.3. On dit que G agit proprement sur H si pour tout $R > 0$ et tout compact K de X, $\{g \in G_K^K \mid B_R^a \cap gB_R^a \neq \emptyset\}$ est compact.

La définition ne dépend pas du choix de la section $x \mapsto a(x)$.

Etant donné le choix d'une section continue $x \mapsto a(x)$, cela équivaut au fait que si $b(g)$ désigne le cocycle $g \mapsto g \cdot a(s(g)) - a(r(g))$, la fonction $\|b\|$ est localement propre, au sens de la Définition suivante:

DÉFINITION 3.4. Soit G un groupoïde localement compact de base X, Z un espace localement compact et $\varphi\colon G \to Z$ une fonction continue. On dit que φ est localement propre si pour tout compact $K \subset X$, sa restriction $\varphi_{|G_K^K}$ est propre.

Si l'on préfére, cela signifie que l'application $g \mapsto (\varphi(g), s(g), r(g))$ de G dans $Z \times X \times X$ est propre.

LEMME 3.5 [10]. *Si G est moyennable, alors G agit proprement sur un champ continu d'espaces affines Euclidiens.*

Démonstration. Il existe des suites exhaustives de compacts $K_n \subset G$ et $K_n' \subset X$ et $\xi_n \in C_c(G)$, $\xi_n \geqslant 0$ avec $\|g\xi_n(s(g)) - \xi_n(r(g))\| \leqslant 1/n^2$ pour tout $g \in K_n$ et $\int_{g\in G^x} \xi_n(g)^2\, \mathrm{d}g = 1$ pour tout $x \in K_n'$.

On pose $H_x = L^2(G^x) \otimes l^2(\mathbb{N})$, $b(g) = (g\xi_n(s(g)) - \xi_n(r(g)))_{n\in\mathbb{N}}$. Ce cocycle définit une action affine de G sur le champ d'espaces affines $(H_x)_{x\in X}$ par la formule $g \cdot \eta = (g\eta_n)_{n\in\mathbb{N}} + b(g)$, et cette action est propre. En effet, soit

$$L_n = \{g \in G \mid \exists m \leqslant n,\ g(\operatorname{supp}\xi_m) \cap (\operatorname{supp}\xi_m) \neq \emptyset\}.$$

C'est un compact, et pour tout $g \in G_{K_n'}^{K_n'} - L_n$, $\|b(g)\|^2 \geqslant 2n$. □

3.3. FONCTIONS DE TYPE NÉGATIF

Il existe des exemples de groupoïdes non moyennables agissant proprement sur un champ continu d'espaces affines Euclidiens [10, 28 chap. 6]. Mentionnons en particulier les groupes de Coxeter finiment engendrés, les groupes agissant proprement sur les arbres, $SO_0(n, 1)$, $SU(n, 1)$. Comme la construction de telles actions repose sur la notion de fonctions conditionnellement de type négatif, il est nécessaire de généraliser cette notion dans notre cadre.

Les préliminaires qui vont suivre, étant analogues à [26], seront énoncés sans démonstration.

Soient X, Z des espaces localement compacts, $p\colon Z \to X$ une application continue. On appelle noyau pour (Z, p) (ou, pour abréger, noyau sur Z) une fonction continue à valeurs scalaires sur $Z \times_X Z$.

DÉFINITION 3.6. Un noyau $\Phi\colon Z \times_X Z \to \mathbb{C}$ est dit de type positif si et seulement si pour tout $x \in X$, tous $z_1, \dots, z_n \in Z_x$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ on a $\sum \bar{\lambda}_i \lambda_j \Phi(z_i, z_j) > 0$.

Par conséquent, Φ est de type positif si et seulement si pour tout x, sa restriction à $Z_x \times Z_x$ est de type positif (où l'on note $Z_x = p^{-1}(x)$).

Si $(H_x)_{x \in X}$ est un champ continu d'espaces Hilbertiens et η est une section continue du champ image réciproque $p^*[(H_x)_{x \in X}]$, alors $\Phi(z_1, z_2) = \langle \eta(z_1), \eta(z_2) \rangle$ est un noyau de type positif. Supposons que pour tout $z \in Z$ il existe une section locale continue de p valant z en $p(z)$. Soit Φ un noyau de type positif pour Z. La construction GNS de [26] fournit une famille (H_x) d'espaces Hilbertiens et des applications continues $\eta_x\colon Z_x \to H_x$ telles que pour tout $x \in X$ et tous $z, z' \in Z_x$ on ait $\Phi(z, z') = \langle \eta_x(z), \eta_x(z') \rangle$. L'hypothèse de l'existence de sections continues montre que (H_x) est muni d'une structure de champ continu et que les η_x donnent une section continue de $p^*(H_x)_{x \in X}$, donc l'exemple donné ci-dessus est universel.

Soit G un groupoïde localement compact. On appelle fonction de type positif sur G une application continue $\phi\colon G \to \mathbb{C}$ telle que

$$
\begin{aligned}
&G \times_{X,r} G \to \mathbb{C} \\
&(g, h) \mapsto \varphi(g^{-1}h)
\end{aligned}
$$

est un noyau de type positif.

Alors si l'application source $s\colon G \to X$ admet des sections locales (par exemple, si G est r-discret avec système de Haar, ou si G est différentiable), toute fonction de type positif sur G donne lieu à une action continue de G sur un champ continu d'espaces Hilbertiens $(H_x)_{x \in X}$ tel que pour tous $x, y \in X$ et $g \in G_x^y$, l'application $\pi(g)\colon H_x \to H_y$ est un unitaire. De plus, il existe une section globale continue $x \mapsto \xi_x$ telle que $\varphi(g) = \langle \xi_{r(g)}, \pi(g)\xi_{s(g)} \rangle$.

DÉFINITION 3.7. Un noyau réel $\Psi\colon Z \times_X Z \to \mathbb{R}$ est dit conditionnellement de type négatif (ou de type négatif, pour abréger), si

(a) Ψ est nul sur la diagonale;

(b) Ψ est symétrique;
(c) pour tout entier $n > 2$, $x \in X$, $z_1, \dots, z_n \in Z_x$ et tous réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que $\sum \lambda_i = 0$, on a $\sum \lambda_i \lambda_j \Psi(z_i, z_j) \leqslant 0$.

Si $p\colon Z \to X$ admet des sections locales continues, il existe un champ continu d'espaces affines Euclidiens et une section η de $p^*(H_x)_{x \in X}$ telle que l'on ait pour tout $x \in X$ et tous $z, z' \in Z_x$

$$\Psi(z, z') = \|\eta(z) - \eta(z')\|^2.$$

H_x est le complété des sommes finies $\sum \lambda_i \eta(z_i)$, où $\sum \lambda_i = 1$, et la norme dans l'espace vectoriel sous-jacent est donnée par

$$\Big\| \sum \lambda_i \eta(z_i) \Big\|^2 = -\frac{1}{2} \sum \lambda_i \lambda_j \Psi(z_i, z_j)$$

si $\sum \lambda_i = 0$.

On définit de même la notion de fonction de type négatif sur un groupoïde localement compact. Si l'application source $s\colon G \to X$ admet des sections locales continues, toute fonction de type négatif sur G engendre une action continue de G sur un champ continu d'espaces affines Euclidiens tel que, par rapport à une certaine section globale continue prise comme section nulle, le cocycle $g \mapsto b(g) \in H_{r(g)}$ vérifie $\psi(g) = \|b(g)\|^2$.

Il découle alors immédiatement de la remarque qui précède que

PROPOSITION 3.8. *Tout groupoïde localement compact possédant une fonction de type négatif localement propre (cf. Définition 3.4) agit proprement par isométries affines sur un champ continu d'espaces affines Euclidiens.*

EXEMPLE 3.9. Soit (V, F) un feuilletage dont toutes les feuilles sont complètes et de courbure sectionnelle constante égale à $c < 0$. En munissant G^x de la métrique résultant de l'inclusion $G^x \subset F_x$ (où F_x désigne la feuille contenant x), on obtient sur G une fonction de type négatif, localement propre, en posant $\psi(g) = \operatorname{ch} d(g, e_x)$ où $e_x \in G_x^x$ est l'élément neutre [26].

On peut obtenir de tels feuilletages de la façon suivante: soit M une surface de Riemann de genre > 2, Γ son groupe fondamental et $\tilde{M}$ son revêtement universel. On sait [41] que $\tilde{M}$ est isomorphe au disque de Poincaré, donc si Γ agit presque librement par isométries sur une variété B, $V = (B \times \tilde{M})/\Gamma$ est un feuilletage dont le groupoïde d'holonomie agit proprement sur un champ continu d'espaces affines Euclidiens, sans que ce soit nécessairement un feuilletage moyennable.

3.4. INVARIANCE PAR ÉQUIVALENCE DE GROUPOÏDES

Le but de ce paragraphe est de montrer la

PROPOSITION 3.10. *Si G_1 et G_2 sont des groupoïdes localement compacts équivalents, alors G_1 agit proprement dus un champ d'espaces affines Euclidiens si et seulement si c'est le cas pour G_2.*

Rappelons tout d'abord quelques notions. Soit G un groupoïde topologique, et (U_i) un recouvrement ouvert de $X = G^{(0)}$. L'espace $G' = \coprod_{i,j} G_{U_i}^{U_j}$ peut être muni d'une structure de groupoïde avec le produit $(j,i,g)(i,k,h) = (j,k,gh)$ si (g,h) est une paire composable, $g \in G_{U_i}^{U_j}$ et $h \in G_{U_k}^{U_i}$. Les applications source et but sont respectivement $s(i,j,g) = (j,j,s(g))$ et $r(i,j,g) = (i,i,r(g))$. Un morphisme strict entre deux groupoïdes est une application $\varphi\colon G_1 \to G_2$ telle que pour toute paire composable (g,h) de G_1, $(\varphi(g),\varphi(h))$ est une paire composable et $\varphi(gh) = \varphi(g)\varphi(h)$. Un morphisme généralisé [35] entre deux groupoïdes G_1 et G_2 est un morphisme strict de $G_1' = \coprod_{i,j}(G_1)_{U_i}^{U_j}$ dans G_2 pour un certain recouvrement ouvert (U_i) de $G_1^{(0)}$. On identifie deux morphismes s'ils sont 'cohomologues'. Cette notion de morphisme permet de définir celle d'équivalence de groupoïdes [23]; tout morphisme admettant un inverse dans cette catégorie est appelé une équivalence de groupoïdes.

Supposons que G_1 et G_2 sont deux groupoïdes localement compacts. On vérifie que si φ_1 et φ_2 sont deux représentants d'une même morphisme, alors φ_1 est localement propre (cf. Définition 3.4) si et seulement si φ_2 l'est. On peut donc parler de 'morphisme localement propre'. En outre, il est clair que si $\varphi_1\colon G \to G'$ et $\varphi_2\colon G' \to G''$ sont des morphismes avec $\varphi_2 \circ \varphi_1$ localement propre, alors φ_1 l'est. Par conséquent,

LEMME 3.11. *Toute équivalence de groupoïdes est un morphisme localement propre.*

LEMME 3.12. *Si $\varphi\colon G \to G'$ est un morphisme strict localement propre et si G' agit proprement sur un champ continu d'espaces affines Euclidiens, alors c'est aussi le cas pour G.*

Démonstration. Soit $\psi\colon G' \to \mathbb{R}_+$ localement propre conditionnellement de type négatif. Alors $\psi \circ \varphi$ vérifie des hypothèses analogues. □

LEMME 3.13. *Soit G un groupoïde localement compact et (U_i) un recouvrement ouvert de $X = G^{(0)}$. Alors G agit proprement sur un champ d'espaces affines Euclidiens si et seulement si c'est le cas pour $G' = \coprod_{i,j} G_{U_i}^{U_j}$.*

Démonstration. L'application canonique $G' \to G$ étant un morphisme strict localement propre, la propriété sur G implique celle sur G' d'après le Lemme 3.12. Supposons qu'il existe une fonction $\psi'\colon G' \to \mathbb{R}_+$ localement propre, conditionnellement de type négatif. Quitte à restreindre G' à un ouvert de $(G')^{(0)}$, on peut supposer que le recouvrement est localement fini. Soit (φ_i) une partition de l'unité subordonnée à ce recouvrement. Alors $\psi(g) = \sum_{i,j} \varphi_i(s(g))\varphi_j(r(g))\psi'((j,i,g))$ est localement propre, conditionnellement de type négatif. $\square$

Démonstration de la Proposition 3.10. D'après les Lemmes 3.11 et 3.12, si G_2 agit proprement sur un champ continu d'espaces affines Euclidiens, alors c'est le cas de $G_1' = \coprod_{i,j} (G_1)_{U_i}^{U_j}$ pour un certain recouvrement ouvert (U_i) de $G_1^{(0)}$, donc c'est le cas pour G_1 d'après le Lemme 3.13. $\square$

Comme exemple d'application, on voit que si G est un groupe de Lie (non nécessairement connexe) et H un sous-groupe fermé, alors $(H\backslash G) \rtimes G$ agit proprement sur un champ d'espaces affines Euclidiens si et seulement c'est le cas pour H.

4. Moyennabilité en *K*-théorie

Nous rappelons ici la définition de la forte moyennabilité en K-théorie pour les groupes localement compacts [37], et nous montrons qu'elle est équivalente à la notion usuelle de K-moyennabilité, ce qui permet d'étendre cette notion aux groupoïdes localement compacts.

4.1. LE MODULE HILBERTIEN $L^2(G, \mathcal{E})$

Soit G un groupoïde localement compact avec système de Haar, $X = G^{(0)}$, B une G-algèbre (séparable), $\mathcal{E}$ un B-module Hilbertien (dénombrablement engendré), non équivariant. Alors on définit un B-module Hilbertien G-équivariant $L^2(G, \mathcal{E})$, qui est isomorphe à $(L^2(G^x)_{x\in X}) \otimes_{C(X)} \mathcal{E}$ si $\mathcal{E}$ est G-équivariant. Explicitons cette définition dans le cas d'un groupe localement compact, celui d'un groupoïde n'entraînant que des complications dans les notations.

Soit donc G un groupe localement compact, $\mathcal{E}$ un B-module Hilbertien non-équivariant. Notons $\alpha\colon G \to \mathrm{Aut}(B)$ l'action de G sur B. $L^2(G, \mathcal{E})$ est défini comme suit: c'est le complété de $C_c(G, \mathcal{E})$, avec

$$\begin{aligned}
&\langle e, e\rangle = \int \alpha_g \langle e(g), e(g)\rangle \, \mathrm{d}g,\\
&(eb)(g) = e(g)\alpha_{g^{-1}}(b),\\
&(\alpha_g(e))(h) = e(g^{-1}h).
\end{aligned}$$

Dans le cas où $\mathcal{E}$ est muni d'une action de G, on a un isomorphisme $L^2(G, \mathcal{E}) \to L^2(G) \otimes \mathcal{E}$ défini par $e \to e'$, où $e'(g) = \alpha_g(e(g))$.

4.2. FORTE MOYENNABILITÉ EN K-THÉORIE

Dans ce paragraphe, nous allons introduire la notion de forte moyennabilité en K-théorie pour les groupoïdes. Dans [37], cette notion a été définie pour les groupes localement compacts. Nous allons cependant voir que, pour un groupe, la forte moyennabilité en K-théorie est équivalente à la K-moyennabilité au sens usuel. Nous pourrons ainsi employer la terminologie 'K-moyennable' pour désigner n'importe laquelle des deux notions de K-moyennabilité.

Notons $H_0 = l^2(\mathbb{N})$ l'espace Hilbertien séparable de dimension infinie, et $\hat{H}_0 = H_0 \oplus H_0$ muni de la $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-graduation canonique.

Dans ce qui suit, G désigne un groupoïde localement compact avec système de Haar, et $X = G^{(0)}$. Pour toute G-algèbre séparable A on note $\hat{\mathcal{H}}^G$ le $C(X)$-module Hilbertien G-équivariant $L^2(G)\hat{\otimes}\hat{H}_0$, où $\hat{\mathcal{H}}^G_A$ est le A-module Hilbertien G-équivariant $\hat{\mathcal{H}}^G\hat{\otimes}_{C(X)}A$.

DÉFINITION 4.1. On dit que G est fortement moyennable en K-théorie si $1 \in KK_G(C(X), C(X))$ se représente par un bimodule de Kasparov de la forme $(\hat{\mathcal{H}}^G, F)$.

Un groupe fortement moyennable en K-théorie est manifestement moyennable en K-théorie. Nous allons voir que la réciproque est vraie.

DÉFINITION 4.2. Soit G un groupoïde localement compact, A une G-algèbre, (u_n) une unité approchée de A. On dit que (u_n) est une unité approchée quasi-centrale pour G si elle est une unité approchée au sens usuel, et si de plus la suite $((u_n)_{r(g)} - g \cdot (u_n)_{s(g)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 uniformément sur tout compact de G.

LEMME 4.3 [13, 35]. *Soit G un groupoïde localement compact. Soit (u_i) une unité approchée d'une G-algèbre A. Soit K un compact de G et $\varepsilon > 0$. Alors il existe $v \in \mathrm{Conv}(u_i)$ tel que*

$$\|g \cdot v_{s(g)} - v_{r(g)}\| \leqslant \varepsilon \quad \forall g \in K.$$

Démonstration. Nous reproduisons simplement la démonstration de [35] pour la convenance du lecteur. Soit φ une fonction continue à support compact sur G, valant 1 sur K. Désignons par $\alpha\colon s^*A \to r^*A$ l'action de G sur A. Il suffit de trouver $v \in \mathrm{Conv}(u_i)$ tel que

$$\|(1 \otimes_r \varphi)(\alpha(v \otimes_s 1) - v \otimes_r 1)\| \leqslant \varepsilon.$$

Soit

$$\begin{aligned}\Phi\colon & A \to r^*A\\ & x \mapsto (1 \otimes_r \varphi)(\alpha(x \otimes_s 1) - x \otimes_r 1).\end{aligned}$$

Φ se prolonge en une application strictement continue de $M(A)$ dans $M(r^*A)$. Soit $C = \mathrm{Conv}(u_i)$.

$\Phi(C)$ est un convexe. Or, C contient 1 dans son adhérence stricte, et comme $\Phi(1) = 0$, cela implique que 0 est strictement adhérent à $\Phi(C)$.

Or, la topologie stricte est plus fine que la topologie faible: en effet, toute forme linéaire normiquement continue est strictement continue. Le théorème de Hahn–Banach s'applique et montre que 0 est également contenu dans l'adhérence pour la topologie de la norme de $\Phi(C)$. □

COROLLAIRE 4.4. *Soit G un groupoïde localement compact. Soit (u_i) une unité approchée d'une G-algèbre A. Alors il existe une unité approchée (v_n), quasi-centrale pour G telle que pour tout n, v_n appartienne à* $\mathrm{Conv}(u_m)_{m\geqslant n}$.

Démonstration. La construction est aisée par récurrence en utilisant le Lemme 4.3. □

LEMME 4.5. *Soit G un groupe localement compact. Soit $\tau: G \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ une représentation, $\varepsilon > 0$, K un compact de G. Alors il existe $E_n \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ positif de rang fini, avec $\sum E_n^2 = 1$, tels que $\tau'(g) = \sum E_n\tau(g)E_n$ vérifie*

(i) $\tau'(g) - \tau(g) \in \mathcal{K} \quad \forall g \in G$;
(ii) $\|\tau'(g) - \tau(g)\| \leqslant \varepsilon \quad \forall g \in K$;
(iii) $g \mapsto \tau(g) - \tau'(g)$ *est continu normiquement.*

Démonstration. La démonstration étant identique à celle de [6], indiquons simplement les étapes principales. Soit F_n une unité approchée de $\mathcal{K}(\mathcal{H})$, quasi-centrale pour G, formée d'opérateurs de rang fini, avec $F_0 = 0$. On prend $E_n = (F_n - F_{n-1})^{1/2}$. Soit $K_0 \subset \cdots \subset K_n \subset \cdots \subset G$ une suite exhaustive de compacts de G telle que $K_0 = K$. Quitte à extraire une suite des F_n, on peut supposer que $\|g\cdot E_n - E_n\| \leqslant \varepsilon\cdot 2^{-n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $g \in K_n$. Alors (E_n) convient. □

PROPOSITION 4.6. *Soit G un groupe localement compact, $\varepsilon > 0$, K un compact de G, σ et τ deux représentations de G telles que τ soit faiblement contenue dans σ. Si $\varphi: \tau(C^*(G)) \to M_n(\mathbb{C})$ est une application complètement positive qui s'identifie à une combinaison convexe φ' d'états vectoriels de $\tau(C^*(G)) \otimes M_n$, alors il existe $V: \mathbb{C}^n \to \mathcal{H}_\sigma \otimes H_0$ isométrique telle que*

$$\|\varphi\circ\tau(g) - V^*(\sigma(g)\otimes \mathrm{Id})V\| \leqslant \varepsilon \qquad \forall g \in K.$$

Démonstration. φ' est limite faible de combinaisons convexes d'états vectoriels de $\sigma(C^*(G)) \otimes M_n$ correspondant à $\varphi_k: \sigma(C^*(G)) \to M_n$. D'autre part, il existe, d'après le thèorème de Stinespring, une représentation π de G dans $\mathcal{L}(\mathcal{H}_\pi)$ et un vecteur $\xi \in \mathcal{H}_\pi^n$ tels que $\forall [a_{ij}] \in M_n(\tau(C^*(G)))$,

$$\begin{aligned}\varphi'([a_{ij}]) &= \langle \xi, (\pi\otimes \mathrm{Id})([a_{ij}])\xi\rangle\\ &= \sum_{i,j}\langle \xi_i, \pi(a_{ij})\xi_j\rangle\end{aligned}$$

Donc $\varphi(\tau(g)) = [\langle \xi_i, \pi(g)\xi_j\rangle]_{i,j} \in M_n$.

En remarquant que pour tout état η de M_n, la fonction de type positif $\eta\circ\varphi\circ\tau$ est limite dans $\sigma(L^\infty(G), L^1(G))$ des fonctions de type positif $\eta\circ\varphi_k\circ\sigma$, on voit que $\eta \circ \varphi \circ \tau$ est limite uniforme sur tout compact des $\eta \circ \varphi_k \circ \sigma$, et par suite $\varphi \circ \tau$ est limite uniforme sur tout compact des $\varphi_k \circ \sigma$.

Par ailleurs, si ψ' est une combinaison convexe d'états vectoriels de $\sigma(C^*(G)) \otimes M_n$, l'application $\psi\colon G \to M_n$ correspondante est de la forme

$$g \mapsto \sum_{k=1}^{N} \lambda_k [\langle \xi_i^k, \sigma(g)\xi_j^k \rangle]_{i,j},$$

où $\xi_i^k \in \mathcal{H}_\sigma$, $\lambda_k \geqslant 0$, $\sum \lambda_k = 1$.

Posons

$$\begin{aligned} V\colon \mathbb{C}^n &\to \mathcal{H}_\sigma^N \subset \mathcal{H}_\sigma \otimes H_0 \\ e_i &\mapsto (\sqrt{\lambda_k}\xi_i^k)_{1 \leqslant k \leqslant N}. \end{aligned}$$

On a $V^*(\eta_1, \dots, \eta_N) = \sum_{i,k} \sqrt{\lambda_k} \langle \xi_i^k, \eta_k \rangle e_i$, donc

$$\langle e_i, V^*(\sigma(g) \otimes 1) V e_j \rangle = \sum_k \lambda_k \langle \xi_i^k, \sigma(g)\xi_j^k \rangle,$$

do'ù

$$V^*(\sigma(g) \otimes 1)V = \psi(g).$$

Prenons k tel que $\forall g \in K,\ \|\varphi \circ \tau(g) - \varphi_k \circ \sigma(g)\| \leqslant \varepsilon$, et $\psi = \varphi_k \circ \sigma$. On obtient alors une isométrie $V\colon \mathbb{C}^n \to \mathcal{H}_\sigma \otimes H_0$ telle que

$$\forall g \in G, \qquad \varphi_k(g) = V^*(\sigma(g) \otimes 1)V,$$

donc V convient. □

PROPOSITION 4.7. *Soient σ et τ deux représentations de G telles que τ soit faiblement contenue dans σ. Alors il existe une suite d'isométries $V_\nu\colon \mathcal{H}_\tau \to \mathcal{H}_\sigma \otimes H_0$ telles que*

(i) $\forall g \in G, \forall \nu, \tau(g) - V_\nu^*(\sigma \otimes \mathrm{Id})(g)V_\nu \in \mathcal{K}(\mathcal{H}_\tau)$;
(ii) $\lim_{\nu \to +\infty} \|\tau(g) - V_\nu^*(\sigma \otimes \mathrm{Id})(g)V_\nu\| = 0$ *uniformément sur tout compact*;
(iii) $g \mapsto \tau(g) - V_\nu^*(\sigma \otimes \mathrm{Id})(g)V_\nu$ *est continu normiquement.*

Démonstration. Soit K_0 un compact, $\varepsilon > 0$. Il suffit de trouver une isométrie $V\colon \mathcal{H}_\tau \to \mathcal{H}_\sigma \otimes H_0$ telle que

(i) $\forall g \in G, \tau(g) - V^*(\sigma \otimes \mathrm{Id})(g)V \in \mathcal{K}(\mathcal{H}_\tau)$;
(ii) $\|\tau(g) - V^*(\sigma \otimes \mathrm{Id}(g))V\| \leqslant \varepsilon$ pour tout $g \in K_0$;
(iii) $g \mapsto \tau(g) - V^*(\sigma \otimes \mathrm{Id})(g)V$ est continu normiquement.

On considère une suite exhaustive de compacts $K_0 \subset \cdots \subset K_n \subset \cdots \subset G$. Soit $E_n \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_\tau)$ de rang fini, avec $\sum E_n^2 = 1$, vérifiant les conditions du Lemme 4.5 pour $\varepsilon/2$ et K_0.

D'après la Proposition 4.6, comme $E_n\mathcal{H}_\tau$ est de dimension finie, il existe $W_n \in \mathcal{L}(E_n\mathcal{H}_\tau, \mathcal{H}_\sigma \otimes H_0)$ isométrique tel que

$$\|E_n\tau(g)E_n - W_n^*(\sigma(g) \otimes 1)W_n\| \leqslant \varepsilon.2^{-n-2}$$

pour tout $g \in K_n$. Soit $V = \oplus_{n\in\mathbb{N}} W_n$. Alors on a nécessairement (i), et $\forall g \in K_0$,

$$\begin{aligned}
&\|\tau(g) - V^*(\sigma(g) \otimes 1)V\| \\
&\quad\leqslant \|\tau(g) - \tau'(g)\| + \sum_{n\in\mathbb{N}} \|E_n\tau(g)E_n - W_n^*(\sigma(g) \otimes 1)W_n\| \\
&\quad\leqslant \varepsilon.2^{-1} + \sum_{n\in\mathbb{N}} \varepsilon.2^{-n-2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Enfin, $g \mapsto \tau'(g) - V^*(\sigma \otimes \mathrm{Id}(g))V$ est limite uniforme sur tout compact de fonctions continues normiquement, donc est continue normiquement. $\square$

PROPOSITION 4.8. *Soit G un groupoïde localement compact avec système de Haar, $(\mathcal{H}_\tau, F) \in \mathbf{E}_G(C(X), C(X))$, $\mathcal{H}_\sigma$ un $C(X)$-module Hilbertien G-équivariant. Ici, $\tau \in \mathcal{L}(s^*\mathcal{H}_\tau, r^*\mathcal{H}_\tau)$ et $\sigma \in \mathcal{L}(s^*\mathcal{H}_\sigma, r^*\mathcal{H}_\sigma)$ désignent les actions de G. On suppose que pour tout compact K de G et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $V \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_\tau, \mathcal{H}_\sigma \otimes H_0)$ isométrique tel que*

(i) *Pour tout $g \in K$, $\|\tau(g) - V_{r(g)}^*(\sigma(g) \otimes 1)V_{s(g)}\| \leqslant \varepsilon$;*
(ii) $\forall f \in C(G)$, $f.(\tau - V^*(\sigma \otimes 1)V) \in \mathcal{K}(s^*\mathcal{H}_\tau, r^*\mathcal{H}_\tau)$.

Alors l'élément $\alpha = [(\mathcal{H}_\tau, F)] \in KK_G(C(X), C(X))$ se représente dans le $C(X)$-module Hilbertien $\mathcal{H}_\sigma \hat{\otimes} \hat{H}_0$.

Démonstration. Soit K_n une suite exhaustive de compacts de G. On prend $\varepsilon_n = 2^{-2^n}$. Soit V_n vérifiant l'hypothèse de l'énoncé pour K_n et ε_n. En identifiant H_0 à $H_0 \otimes H_0$, et V_n à $(0, \ldots, V_n, \ldots)$, et en interpolant entre V_n et V_{n+1} par $(\cos\theta)V_n + (\sin\theta)V_{n+1}$, on peut supposer qu'il existe $(V_t)_{t\in[0,\infty[} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_\tau, \mathcal{H}_\sigma \otimes H_0 \otimes C([0, \infty]))$ vérifiant des hypothèses analogues. Notons $\mathcal{H}_{t+n} = V_{t+n}V_{t+n}^*\mathcal{H}_\sigma \otimes H_0$ et $\mathcal{H}'_{t+n} = (1 - V_{t+n}V_{t+n}^*)\mathcal{H}_\sigma \otimes H_0$. En utilisant les isomorphismes ('approximativement' G-équivariants)

$$\mathcal{H}_\tau \xrightarrow{V_t} \mathcal{H}_t \xrightarrow{V_{t+1}V_t^*} \mathcal{H}_{t+1} \cdots$$

on obtient un *unitaire* de $\mathcal{H}_\tau \oplus (\mathcal{H}_\sigma \otimes H_0) \simeq \mathcal{H}_\tau \oplus \mathcal{H}_t \oplus \mathcal{H}'_t \oplus \mathcal{H}_{t+1} \oplus \mathcal{H}'_{t+1} \cdots$ dans $\mathcal{H}_\sigma \otimes H_0 \simeq \mathcal{H}_t \oplus \mathcal{H}'_t \oplus \mathcal{H}_{t+1} \oplus \mathcal{H}'_{t+1} \cdots$ (où l'on a utilisé $H_0 \otimes H_0 \simeq H_0$).

Notons $\mathcal{H}' = \mathcal{H}_\tau \oplus \mathcal{H}_\sigma \otimes \hat{H}_0$. D'après ce qui précède, on obtient un unitaire $W_t \colon \mathcal{H}' \to \mathcal{H}_\sigma \otimes \hat{H}_0$, vérifiant des hypothèses analogues aux V_n, avec

$$\lim_{t\to\infty} \|(\tau(g) \oplus (\sigma(g) \otimes 1)) - (W_t)_{r(g)}^*(\sigma(g) \otimes 1)(W_t)_{s(g)}\| = 0$$

uniformément sur tout compact de G.

Soit $F' = F \oplus (1 \otimes \varepsilon) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}')$, où ε est la graduation de $\hat{H}_0$. L'élément $(\mathcal{H}', F')$ est égal à $(\mathcal{H}_\tau, F)$ dans $KK_G(C(X), C(X))$. Le bimodule $(\mathcal{H}_\sigma \otimes \hat{H}_0, W_t F' W_t^*) \in \mathbf{E}_G(C(X), C(X))$ définit un élément de $KK_G(C(X), C(X))$ indépendant de t. Montrons qu'il est égal à la classe de $(\mathcal{H}_\tau, F)$. Il suffit de montrer que

$$(\mathcal{H}_\sigma \otimes \hat{H}_0, W_t F' W_t^*) \oplus (\mathcal{H}'^{\mathrm{op}}, -F')$$

est homotope à un dégénéré. Or, il est homotope (par une 'rotation', comme dans la démonstration que $KK(A, B)$ est un groupe Abélien) à $((\mathcal{H}_\sigma \otimes \hat{H}_0) \oplus \mathcal{H}'^{\mathrm{op}}, F_t')$ où

$$F_t' = \begin{bmatrix} 0 & W_t \\ W_t^* & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{et} \quad ((\mathcal{H}_\sigma \otimes \hat{H}_0) \oplus \mathcal{H}'^{\mathrm{op}}, F_t')_{t \in [0, \infty[}$$

définit une homotopie vers 0. □

Des deux propositions qui précèdent, en prenant pour σ la représentation régulière et pour G un groupe localement compact, on trouve:

PROPOSITION 4.9. *Soit G un groupe localement compact. Soit* $\alpha = [(\mathcal{H}_\tau, F)] \in KK_G(\mathbb{C}, \mathbb{C})$. *On suppose que* τ *est faiblement contenue dans la régulière. Alors* α *est représenté par un bimodule de la forme* $(L^2(G) \otimes \hat{H}_0, \lambda \otimes 1, F')$.

D'où le

COROLLAIRE 4.10. *Soit G un groupe moyennable en K-théorie. Alors G est fortement moyennable en K-théorie.*

Dorénavant, nous emploierons la terminologie 'K-moyennable' pour désigner n'importe laquelle des deux formes de K-moyennabilité, sachant qu'elles s'identifient pour un groupe localement compact. En effet, nous ne disposons pas d'autre notion de K-moyennabilité pour les groupoïdes que la K-moyennabilité forte; généraliser la définition de [28] n'aurait que peu d'intérêt, puisque la propriété sur les groupes qui dit que le produit tensoriel d'une représentation quelconque par une représentation faiblement contenue dans la régulière est faiblement contenu dans la régulière ne se généralise (*a priori*) pas aux groupoïdes.

4.3. DISCUSSION SUR LA K-MOYENNABILITÉ

Rappelons tout d'abord la

PROPOSITION 4.11. *Soit G un groupoïde localement compact avec système de Haar. On considère les assertions:*

(i) *G est moyennable*;
(ii) *pour toute G-algèbre séparable A, l'application canonique* $A \rtimes G \to A \rtimes_{\mathrm{red}} G$ *est un isomorphisme*;

(iii) pour toute G-algèbre séparable nucléaire A, la C^*-algèbre $A \rtimes G$ est nucléaire.

Alors (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii).

Démonstration. (i) $\Rightarrow$ (ii) résulte de [39] et [40].

(ii) $\Rightarrow$ (iii): soit D une C^*-algèbre séparable. On a $(A \rtimes G) \otimes_{\max} D = (A \otimes_{\max} D) \rtimes G = (A \otimes D) \rtimes G = (A \otimes D) \rtimes_{\mathrm{red}} G = (A \rtimes_{\mathrm{red}} G) \otimes D$. □

Examinons l'analogue de cette proposition en K-théorie.

PROPOSITION 4.12. *Soit G un groupoïde localement compact avec système de Haar. On considère les assertions:*

(i) *les hypothèses du Théorème 2.4 sont vérifiées*;
(ii) *G est moyennable en K-théorie*;
(iii) *l'élément $\lambda_A \in KK(A \rtimes G, A \rtimes_{\mathrm{red}} G)$ est inversible pour toute G-algèbre séparable A*;
(iv) *$A \rtimes G$ et $A \rtimes_{\mathrm{red}} G$ sont nucléaires en K-théorie pour toute G-algèbre séparable K-nucléaire A. Alors* (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) *et* (ii) $\Rightarrow$ (iv).

Démonstration. (i) $\Rightarrow$ (ii) résulte du Théorème 2.4.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Soit $(\hat{H}_0 \otimes L^2(G), F)$ un représentant de $1 \in KK_G(C(X), C(X))$.

L'élément $1 \in KK(A \rtimes G, A \rtimes G)$ est représenté dans $(\hat{H}_0 \otimes A \otimes_{C(X)} L^2(G)) \otimes_A (A \rtimes G) = \hat{H}_0 \otimes L^2(G) \otimes_{C(X)} (A \rtimes G)$.

On doit montrer que l'action à gauche de $A \rtimes G$ se factorise à travers $A \rtimes_{\mathrm{red}} G$. Considérons une représentation fidèle (π, L, H_x, μ) de (A, G), où (H_x) est une champ μ-mesurable d'espaces Hilbertiens séparables. Il suffit de prouver que $A \rtimes G \to \mathcal{L}(\hat{H}_0 \otimes L^2(G) \otimes_{C(X)} \int_X^{\oplus} H_x \, \mathrm{d}\mu(x))$ se factorise à travers $A \rtimes_{\mathrm{red}} G$. Or, via l'isométrie

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_X^{\oplus} L^2(G^x) \otimes H_x \, \mathrm{d}\mu(x) & \to & \displaystyle\int_X^{\oplus} L^2(G_x) \otimes H_x \, \mathrm{d}\mu(x) \\ \xi & \mapsto & \eta, \end{array}$$

où $\eta(g) = L_{g^{-1}}(\xi(g)) \Delta(g)^{1/2} \in H_{s(g)}$, l'action de A devient $(a \cdot \eta)(g) = \pi(\alpha_{g^{-1}}(a)) \eta(g)$ et $C^*(G)$ agit par convolution dans le facteur $(L^2(G_x))_{x \in X}$ de $(L^2(G_x))_{x \in X} \otimes_{C(X)} \int_X^{\oplus} H_x \, \mathrm{d}\mu(x) \simeq \int_X^{\oplus} L^2(G_x) \otimes H_x \, \mathrm{d}\mu(x)$. Par conséquent, l'action de $A \rtimes G$ se factorise bien à travers $A \rtimes_{\mathrm{red}} G$, et on obtient un élément $\omega_A \in KK(A \rtimes_{\mathrm{red}} G, A \rtimes G)$ tel que $1_{A \rtimes G} = \lambda_A \otimes_{A \rtimes_{\mathrm{red}} G} \omega_A$.

Pour montrer que $\omega_A \otimes \lambda_A = 1$, considérons une homotopie (E_t, F_t) entre $(E_0, F_0) = (\hat{H}_0 \otimes L^2(G), F)$ et 1_G. On a $\omega_A \otimes \lambda_A = j_{G,\mathrm{red}}(\sigma_A[(E_0, F_0)]) = j_{G,\mathrm{red}}(\sigma_A[(E_1, F_1)]) = 1_{A \rtimes_{\mathrm{red}} G}$.

(ii) $\Rightarrow$ (iv): il suffit de montrer que $A \rtimes G$ est K-nucléaire. Soit $(\mathcal{E}_1, F_1) = (\hat{H}_0 \otimes L^2(G), F_1) \in \mathbf{E}_G(C(X), C(X))$ un représentant de $1 \in KK_G(C(X), C(X))$ et $(\mathcal{E}_2, F_2)$ un représentant de $1_A \in KK_G(A, A)$ tel que l'action à gauche de A

soit un morphisme strictement nucléaire. Soit $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_1 \hat{\otimes}_{C(X)} \mathcal{E}_2) \rtimes G$. Comme dans [44], on a pour toute C^*-algèbre séparable D:

$$\mathcal{E} \hat{\otimes}_{\max} D = (\hat{H}_0 \otimes L^2(G) \hat{\otimes}_{C(X)} (A \hat{\otimes} D)) \rtimes G \hat{\otimes}_{(A \hat{\otimes} D) \rtimes G} (\mathcal{E}_2 \hat{\otimes}_{\max} D) \rtimes G.$$

Or, on voit comme plus haut que $(\hat{H}_0 \otimes L^2(G) \hat{\otimes}_{C(X)} (A \hat{\otimes} D)) \rtimes G$ est un $(A \hat{\otimes} D) \rtimes_{\mathrm{red}} G$, $(A \hat{\otimes} D) \rtimes G$-bimodule. Comme $(A \hat{\otimes} D) \rtimes_{\mathrm{red}} G = (A \rtimes_{\mathrm{red}} G) \hat{\otimes} D$ est un quotient de $(A \rtimes G) \hat{\otimes} D$, $\mathcal{E} \hat{\otimes}_{\max} D$ est bien un $(A \rtimes G) \hat{\otimes} D$-module à gauche. $\square$

Remarque 4.13. On verra (Théorème 9.3) que si G agit proprement sur un champ continu d'espaces affines Euclidiens, alors (i) est vérifié.

5. Suites exactes en KK_G-théorie

Nous donnons ici des critères pour qu'une suite exacte G-équivariante $0 \to J \to B \to A \to 0$ donne lieu à une suite exacte à six termes en KK_G-théorie, donc en particulier un élément de $KK_G^1(A, J)$. La plupart des résultats qui suivent sont exposés dans [37] dans le cas des groupes.

La proposition qui suit est énoncée dans [37] dans le cas où G est un groupe localement compact fortement moyennable en K-théorie.

PROPOSITION 5.1. *Soit G un groupoïde localement compact avec systéme de Haar,*

$$0 \longrightarrow J \xrightarrow{j} B \xrightarrow{q} B/J \longrightarrow 0$$

une suite exacte G-équivariante de G-algèbres (séparables), A une G-algèbre (séparable) telle que 1_A se représente par un A,A-bimodule de la forme $A \to \mathcal{L}(\hat{\mathcal{H}}_A^G)$. Alors on a une suite exacte

$$\begin{array}{ccccc} KK_G^{\mathrm{nuc}}(A, J) & \xrightarrow{j_*} & KK_G^{\mathrm{nuc}}(A, B) & \xrightarrow{q_*} & KK_G^{\mathrm{nuc}}(A, B/J) \\ \delta \uparrow & & & & \downarrow \delta \\ KK_G^{1,\mathrm{nuc}}(A, B/J) & \xleftarrow{q_*} & KK_G^{1,\mathrm{nuc}}(A, B) & \xleftarrow{j_*} & KK_G^{1,\mathrm{nuc}}(A, J) \end{array}$$

COROLLAIRE 5.2. Soit G un groupoïde localement compact avec système de Haar,

$$0 \longrightarrow J \xrightarrow{j} B \xrightarrow{q} B/J \longrightarrow 0$$

une suite exacte G-équivariante de G-algèbres, A une $Z \rtimes G$-algèbre nucléaire où Z est un espace localement compact (séparé) muni d'une action propre de G. Alors on a une suite exacte

$$\begin{array}{ccccc} KK_G(A, J) & \xrightarrow{j_*} & KK_G(A, B) & \xrightarrow{q_*} & KK_G(A, B/J) \\ \delta \uparrow & & & & \downarrow \delta \\ KK_G^1(A, B/J) & \xleftarrow{q^*} & KK_G^1(A, B) & \xleftarrow{j_*} & KK_G^1(A, J) \end{array}$$

Démonstration. Le fait que A soit nucléaire implique que KK_G s'identifie à KK_G^{nuc}. De plus, tout A-module Hilbertien G-équivariant est un facteur direct de $\hat{\mathcal{H}}_A^G$ d'après le paragraphe qui précède. □

On a un résultat du même genre:

PROPOSITION 5.3. *Soit G un groupoïde localement compact avec système de Haar, Z un G-espace propre, et*

$$0 \to J \to B \to B/J \to 0$$

une suite exacte $Z \rtimes G$-équivariante. Soit A une G-algèbre. Alors on a une suite exacte à six termes comme dans la Proposition 5.1.

Démonstration. Là encore, la démonstration est pratiquement identique à celle de [37]. On se ramène tout d'abord à montrer que la suite

$$KK_G^{\mathrm{nuc}}(A, J) \to KK_G^{\mathrm{nuc}}(A, B) \xrightarrow{q_*} KK_G^{\mathrm{nuc}}(A, B/J)$$

est exacte. Pour cela, on considère un A, B-bimodule de Kasparov G-équivariant nucléaire $(\mathcal{E}, F)$ tel que la classe de $q_*(\mathcal{E}, F)$ dans $KK_G^{\mathrm{nuc}}(A, B/J)$ soit nulle. Il existe donc $(\mathcal{E}_0, F_0)$, $(\mathcal{E}_1, F_1) \in \mathbf{D}_G^{\mathrm{nuc}}(A, B/J)$ (dégénérés) tels que $(q_*\mathcal{E}, F) \oplus (\mathcal{E}_0, F_0)$ soit opératoriellement homotope à $(\mathcal{E}_1, F_1)$.

Soit $\mathcal{E}'$ le $C(Z)$, $C(Z)$-bimodule $Z \rtimes G$-équivariant $L^2(Z \rtimes G) \otimes \hat{H}_0$. Comme $Z \rtimes G$ est un groupoïde propre, il existe F' tel que $(\mathcal{E}', F')$ représente $1 \in KK_{Z \rtimes G}(C(Z), C(Z))$.

En tensorisant par $\sigma_{Z,B/J}(\mathcal{E}', F')$ l'homotopie opératorielle précédente, et en remarquant que

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_0 \otimes_{B/J} \sigma_{Z,B/J}(\mathcal{E}') &\simeq L^2(G, \mathcal{E}_0) \otimes \hat{H}_0,\\
\mathcal{E}_1 \otimes_{B/J} \sigma_{Z,B/J}(\mathcal{E}') &\simeq L^2(G, \mathcal{E}_1) \otimes \hat{H}_0,\\
q_*(\mathcal{E}, F) \otimes_{B/J} \sigma_{Z,B/J}(\mathcal{E}') &\simeq q_*((\mathcal{E}, F) \otimes_B \sigma_{Z,B}(\mathcal{E}'))\\
&\simeq q_*(L^2(G, \mathcal{E}) \otimes \hat{H}_0),
\end{aligned}$$

il suffit de reproduire l'argument de relèvement des dégénérés et des homotopies opératorielles de [37] (nous rappelons ci-dessous l'énoncé des lemmes utilisés). □

LEMME 5.4 ([37], lemme 5.6). *Soient $(\mathcal{E}, F) \in \mathbf{E}_G(A, B)$ et $(F_t)_{t \in [0,1]}$ une homotopie opératorielle telle que:*

$$F_t \in \mathcal{L}(\mathcal{E} \otimes_B B/J), (\mathcal{E} \otimes_B B/J, F_t) \in \mathbf{E}_G(A, B/J) \text{ et } F \otimes 1 = F_0.$$

Alors il existe une homotopie opératorielle S_t avec $(\mathcal{E}, S_t) \in \mathbf{E}_G(A, B)$, $S_0 = F$ et $S_t \otimes 1 - F_t \in \mathcal{K}(\mathcal{E} \otimes_B B/J))$.

LEMME 5.5 ([37], lemme 5.9). *Soit* $(\mathcal{E}, F)$ *un élément de* $\mathcal{D}_G^{\mathrm{nuc}}(A, B/J)$. *Il existe alors* $(\mathcal{E}', F') \in \mathcal{D}_G^{\mathrm{nuc}}(A, B)$ *tel que* $q_*(\mathcal{E}', F') = (\hat{\mathcal{H}}^G \otimes \mathcal{E}, 1 \otimes F)$.

Enfin, un autre résultat analogue:

PROPOSITION 5.6. *Soit* G *un groupoïde localement compact avec système de Haar, et*

$$0 \to J \to B \xrightarrow{q} B/J \to 0$$

une suite exacte G*-équivariante. On suppose que* q *admet un relèvement complètement positif (non nécessairement* G*-équivariant) de norme 1, et qu'il existe un* G*-espace propre* Z *tel que* B/J *soit une* $Z \rtimes G$*-algèbre. Alors pour toute* G*-algèbre* A*, on a une suite exacte (à trois termes):*

$$KK_G^*(A, J) \to KK_G^*(A, B) \to KK_G^*(A, B/J).$$

Démonstration. Soit $(\mathcal{E}, F) \in \mathbf{E}_G(A, B)$ dont l'image dans $KK_G(A, B/J)$ est 0. Alors il existe des A, B/J-bimodules dégénérés $(\mathcal{E}_1, F_1, \varphi_1)$ et $(\mathcal{E}_2, F_2, \varphi_2)$ tels que

$$q_*(\mathcal{E}, F) \oplus (\mathcal{E}_1, F_1) \sim_{\mathrm{oh}} (\mathcal{E}_2, F_2).$$

($\sim_{\mathrm{oh}}$ dénote l'homotopie opératorielle.) $(\mathcal{E}_1, F_1, \varphi_1)$ est un facteur direct de $(\mathcal{E}_1 \otimes_{C(X)} L^2(G), F_1 \otimes 1, \varphi_1 \otimes 1)$: en effet, soit $c\colon Z \to \mathbb{R}_+$ avec les propriétés usuelles, $\xi \in L^2(Z \rtimes G)$ définie par $\xi(z, g) = c(zg)^{1/2}$, et P le projecteur $P(b \otimes_{C(Z)} \eta) = b \otimes_{C(Z)} \xi \langle \xi, \eta\rangle$ de $B/J \otimes_{C(Z)} L^2(Z \rtimes G) \simeq B/J \otimes_{C(X)} L^2(G)$. Alors P commute avec l'action à gauche de B/J, donc $B/J \otimes_{C(X)} L^2(G) = P(B/J \otimes_{C(X)} L^2(G)) \oplus (1 - P)(B/J \otimes_{C(X)} L^2(G))$, d'où

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1 &= \mathcal{E}_1 \otimes_{B/J} (B/J) \\ &\simeq \mathcal{E}_1 \otimes_{B/J} P(B/J \otimes_{C(X)} L^2(G)) \end{aligned}$$

est un facteur direct de $\mathcal{E}_1 \otimes_{B/J} (B/J \otimes_{C(X)} L^2(G)) \simeq \mathcal{E}_1 \otimes_{C(X)} L^2(G)$.

Par conséquent, on peut supposer que $(\mathcal{E}_1, F_1)$ est un facteur direct d'un bimodule dégénérê de la forme $(\mathcal{E}_1' \otimes_{C(X)} L^2(G), F_1' \otimes 1)$. La fin de la démonstration est la même en utilisant le Lemme 5.4 et le Lemme 5.5. $\square$

6. Construction d'un espace muni d'une action propre de *G*

Ici, on suppose que G est un groupoïde localement compact (avec système de Haar) agissant proprement sur un champ continu d'espaces affines Euclidiens. Nous allons construire à partir de ces données un espace localement compact muni d'une action propre (au sens usuel) de G.

Examinons d'abord le cas où G est un groupe localement compact Γ. Soit H un espace Euclidien séparable de dimension infinie sur lequel le groupe localement compact Γ agit par isométries affines. On note H' l'espace H muni de la topologie faible, et

$$Z' = \{(\eta, s) \in H' \times \mathbb{R}_+ |\ \|\eta\| \leqslant s\}.$$

Comme $\eta \mapsto \|\eta\|$ est s.c.i. de H' dans $\mathbb{R}_+$, Z' est fermé dans $H' \times \mathbb{R}_+$. De plus, il est localement compact σ-compact (séparé).

Soit Z l'espace $H \times \mathbb{R}_+$ muni de la topologie telle que

$$(\xi, t) \mapsto (\eta, s) = (\xi, \sqrt{\|\xi\|^2 + t^2})$$

soit un homéomorphisme de Z sur Z'. Alors, dans Z, (ξ_i, t_i) tend vers (ξ, t) si et seulement si ξ_i converge faiblement vers ξ et $\|\xi_i\|^2 + t_i^2$ tend vers $\|\xi\|^2 + t^2$.

Pour tout sous-espace affine de dimension finie V de H, notons $V^\perp$ son orthogonal: c'est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel sous-jacent H_0. Désignons par $B(V)$ la sous-C^*-algèbre de $l^\infty(H)$ engendrée par les fonctions de la forme

$$\begin{aligned} V \oplus V^\perp &\rightarrow \mathbb{C} \\ (v, w) &\mapsto f(v)g(\|w\|), \end{aligned}$$

où f et g sont des fonctions continues tendant vers 0 à l'infini. Soit B la limite inductive des $B(V)$. Il est clair que le spectre de $B(V)$ est $V \times \mathbb{R}_+$, et que si $V \perp W$, l'inclusion $B(V) \rightarrow B(V \oplus W)$ est induite par l'application

$$(v + w, t) \mapsto (v, \sqrt{\|w\|^2 + t^2}).$$

Considérons l'application $Z \rightarrow V \times \mathbb{R}_+$ donnée par la même formule. On voit facilement qu'elle est continue, et que ces applications sont compatibles avec le système inductif. Comme elles sont surjectives, on obtient une injection de B dans $C(Z)$. Or, B sépare les points de Z, donc d'après le théorème de Stone–Weierstrass, $B = C(Z)$.

On définit une action de Γ sur Z par $g.(\xi, t) = (g.\xi, t)$.

LEMME 6.1. *Γ agit continûment sur Z. Si Γ agit proprement sur H, alors Γ agit proprement sur Z au sens usuel. La topologie définie sur Z ne dépend pas du choix de l'origine.*

Démonstration. On a $g \cdot (\eta, s) = (g \cdot \eta, \sqrt{\|g \cdot \eta\|^2 + t^2})$, où $s^2 = \|\eta\|^2 + t^2$. Or, $\|g \cdot \eta\|^2 = \|\eta\|^2 + 2\langle \alpha_g(\eta), b(g)\rangle + \|b(g)\|^2$, donc

$$g \cdot (\eta, s) = (g \cdot \eta, \sqrt{s^2 + 2\langle \alpha_g(\eta), b(g)\rangle + \|b(g)\|^2}),$$

d'où la continuité de l'action.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $Z'_n = \{(\eta, s) \in Z' |\ s \leqslant n\}$. Alors Z'_n est une suite exhaustive de compacts de Z'. Via l'homéomorphisme $Z \rightarrow Z'$, Z'_n devient

$$Z_n = \{(\xi, t) \in Z |\ \|\xi\|^2 + t^2 \leqslant n^2\}.$$

Pour tout $g \in \Gamma$, si $(\xi, t) \in Z_n$ et $\|b(g)\| \geqslant 3n$, on a

$$\begin{aligned}
\|g \cdot \xi\|^2 + t^2 &= \|\alpha_g(\xi) + b(g)\|^2 + t^2 \\
&\geqslant (\|b(g)\| - \|\xi\|)^2 + t^2 \\
&\geqslant (\|b(g)\| - n)^2 \\
&\geqslant 4n^2
\end{aligned}$$

Donc $\|b(g)\| \geqslant 3n \Rightarrow g \cdot Z_n \cap Z_n = \emptyset$.

Pour tous $\xi \in H$, $a \in H$, $t \in \mathbb{R}_+$ on a:

$$\|\xi + a\|^2 + t^2 = (\|\xi\|^2 + t^2) + 2\langle a, \xi\rangle + \|a\|^2,$$

d'où la dernière assertion. □

Remarque 6.2. *Si Γ est un groupe de Lie agissant proprement sur l'espace affine Euclidien H, alors Z est le classifiant des actions propres de Γ.*

Démonstration. D'après l'Appendice, comme on sait déjà que l'action de Γ sur Z est propre, il suffit de montrer que pour tout sous-groupe fini Γ' de Γ il existe un point Γ'-invariant, et que les deux projections $Z \times Z \to Z$ sont Γ'-homotopes.

Soit $a \in H$ un point quelconque. Posons $b = \int_{\Gamma'} (g \cdot a)\, dg$, où dg désigne la mesure de Haar normalisée de Γ'. Alors b est Γ'-invariant, donc $(b, 0) \in Z$ est Γ'-invariant.

Quitte à changer d'origine, on peut supposer que $b = 0$. Alors

$$\begin{aligned}
\varphi_\lambda\colon Z' \times Z' &\to Z' \\
((\xi, t), (\xi', t')) &\mapsto ((1-\lambda)\xi + \lambda\xi', (1-\lambda)t + \lambda t')
\end{aligned}$$

est une homotopie Γ'-équivariante entre les deux projections. □

Examinons le cas des actions d'un groupoïde sur un champ continu d'espaces affines. Ayant choisi une origine, on note E le $C(X)$-module associé. Soit $H' = \cup_{x \in X} H_x$. Pour tout $x \in X$ et tout $\xi \in H_x$, on note $p(\xi) = x$. On munit H' de la topologie la moins fine telle que l'application

$$\begin{aligned}
H' &\to E' \times X \\
\xi &\mapsto (T_\xi, p(\xi))
\end{aligned}$$

soit continue, où $T_\xi(\zeta) = \langle \xi, \zeta_{p(\xi)}\rangle$ pour tout $\xi \in E$.

Remarque. Si le champ est constant (de la forme $X \times H_0$), la topologie est le produit de celle de X et de la topologie faible de H_0.

Pour tout compact K de X, $L = \{\xi \in H' |\ \|\xi\| \leqslant R,\ p(\xi) \in K\}$ est compact. En effet, si $\xi_i \in L$, on peut supposer que $p(\xi_i) \to x \in K$ et que $T_{\xi_i} \to \lambda \in E'$

(faiblement). Soient e_n des sections continues telles que $(e_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ forme une base orthonormale de H_x, $\lambda_n = \lambda(e_n)$, $\eta_n = \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k(x) \in H_x$. Alors

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 = \lim_{i\to\infty} \langle \eta_n, \xi_i\rangle \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2}\, R,$$

d'où $\eta = \sum_{k=1}^\infty \lambda_k e_k(x) \in H_x$ existe et $\xi_i \to \eta$ dans H'.

On pose alors $Z' = \{(\xi, t) \in H' \times \mathbb{R}_+ |\ \|\xi\| \leqslant t\}$. Il est clairement localement compact. Notons Z l'espace $H' \times \mathbb{R}_+$ (du point de vue ensembliste), avec la topologie telle que l'application $Z \to Z'$ qui envoie (ξ, t) sur $(\xi, \sqrt{\|\xi\|^2 + t^2})$ soit un homéomorphisme.

Alors si G agit proprement sur H, il agit proprement (au sens habituel) sur Z. En effet, soit $K' \subset X$ un compact et

$$K = \{(\xi, t) \in Z |\ p(\xi) \in K' \text{ et } \|\xi\|^2 + t^2 \leqslant R^2\}.$$

Alors pour tout $g \in G$, $gK \cap K \neq \emptyset$ implique qu'il existe $\xi \in p^{-1}(K')$ vérifiant $\|\xi\| \leqslant R$, $g\xi \in p^{-1}(K')$, $\|g\xi\| \leqslant R$, donc que $g \in G_{K'}^{K'}$ et $\|b(g)\| \leqslant 2R$.

Remarque 6.3. Lorsque G est un groupoïde r-discret, la même démonstration que plus haut montre que Z est le classifiant des actions propres de G. Par contre, je ne sais pas si c'est le cas pour un groupoïde non r-discret.

7. Le dual Dirac

Soit G un groupoïde localement compact avec système de Haar agissant proprement sur un champ continu d'espaces affines Euclidiens $(H_x)_{x\in X}$, où $X = G^{(0)}$. Nous allons exhiber un élément de $KK_G(C(X), \mathcal{A}(H))$, où $\mathcal{A}(H)$ est une $Z \rtimes G$-algèbre, Z étant l'espace apparaissant dans la Section 6.

On rappelle la construction de [24]. Soit $S = C(\mathbb{R})$ muni de la graduation par la parité des fonctions. Si H est un espace affine Euclidien et V un sous-espace affine de dimension finie de H, on note $A(V) = C(T^*V) \otimes \mathcal{L}(\Lambda^*(V_0))$, où V_0 est l'espace vectoriel sous-jacent, $\Lambda^*(V_0)$ est l'algèbre extérieure *complexe*.

Si W est un espace vectoriel de dimension finie et $w \in W \otimes \mathbb{C}$, notons $e(w) : \Lambda^*W \to \Lambda^*W$ la multiplication extérieure par w, et $c(w) = e(w) + e(w)^*$ la multiplication de Clifford complexe. En identifiant T^*W avec le complexifié $W\otimes\mathbb{C}$ de W, soit β le multiplicateur non-borné (voir [7] ou [16], section 6.5 pour cette notion) de $C(T^*W, \Lambda^*W)$ défini par $(\beta\xi)(w) = c(w) \cdot \xi(w)$.

Notons T la fonction identique de $\mathbb{R}$, considérée comme multiplicateur non-borné de degré 1 de S. L'algèbre $\mathcal{A}(H)$ est la limite inductive des $A(V)\hat{\otimes}S$: si $V' = V \overset{\perp}{\oplus} W$ (somme directe orthogonale de l'espace affine V et de l'espace vectoriel W), on a $A(V') = A(V)\hat{\otimes}A(W)$, et le morphisme

$$\begin{aligned} S &\to A(W)\hat{\otimes}S \\ T &\mapsto 1\hat{\otimes}T + \beta\hat{\otimes}1, \end{aligned}$$

induit, en effectuant $\cdot \otimes 1_{A(V)}$, une application $A(V)\hat{\otimes}S \to A(V')\hat{\otimes}S$. Le fait que l'on obtient bien un système inductif résulte du lemme suivant:

LEMME 7.1. *Soient A et B des C^*-algèbres $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-graduées, et b un multiplicateur non-borné de degré 1 de B vérifiant* $(1+b^2)^{-1} \in B$. *On note*

$$\begin{aligned}\Psi_{A,B,b}\colon A\hat{\otimes}S &\to A\hat{\otimes}B\hat{\otimes}S\\ a\hat{\otimes}f &\mapsto a\hat{\otimes}f(b\hat{\otimes}1+1\hat{\otimes}T)\end{aligned}$$

Alors, si $B = B_1\hat{\otimes}B_2$ et $b = b_1\hat{\otimes}1 + 1\hat{\otimes}b_2$, où b_i, B_i vérifient des hypothèses analogues, on a

$$\Psi_{A,B,b} = \Psi_{A\hat{\otimes}B_1,B_2,b_2} \circ \Psi_{A,B_1,b_1}.$$

Démonstration. On se ramène aisément à $A = \mathbb{C}$. On a pour tout $f \in S$, $b' \in B_1$, $h \in S$,

$$\begin{aligned}&\psi_{\mathbb{C},B,b}(f) = f(b_1\hat{\otimes}1\hat{\otimes}1 + 1\hat{\otimes}b_2\hat{\otimes}1 + 1\hat{\otimes}1\hat{\otimes}T),\\ &\psi_{\mathbb{C},B_1,b_1}(f) = f(b_1\hat{\otimes}1 + 1\hat{\otimes}T),\\ &\psi_{B_1,B_2,b_2}(b'\hat{\otimes}h) = b'\hat{\otimes}h(b_2\hat{\otimes}1 + 1\hat{\otimes}T).\end{aligned}$$

La dernière ligne montre que:

$$\begin{aligned}\psi_{B_1,B_2,b_2}(b_1\hat{\otimes}1) &= b_1\hat{\otimes}1\hat{\otimes}1,\\ \psi_{B_1,B_2,b_2}(1\hat{\otimes}T) &= 1\hat{\otimes}b_2\hat{\otimes}1 + 1\hat{\otimes}1\hat{\otimes}T,\end{aligned}$$

donc on a bien

$$\psi_{B_1,B_2,b_2} \circ \psi_{\mathbb{C},B_1,b_1}(T) = b_1\hat{\otimes}1\hat{\otimes}1 + 1\hat{\otimes}b_2\hat{\otimes}1 + 1\hat{\otimes}1\hat{\otimes}T. \qquad \square$$

Dans le cas où G est un groupoïde, $(\mathcal{A}(H_x)_{x\in X})$ est muni d'une structure de champ continu de C^*-algèbres. En effet, pour tout compact $K \subset X$, tout ouvert $\Omega \subset K$, si $\varphi \in C_c(X)$ est à support inclus dans Ω et $a_0, \ldots, a_n\colon K \to H$ sont des sections locales continues telles que pour tout $x \in K$, les points $a_0(x), \ldots, a_n(x)$ sont affinement indépendants, soit $V(x)$ l'espace affine engendré par ces points. Alors le champ $x \mapsto V(x)$ au-dessus de K est isomorphe au champ constant $K \times \mathbb{R}^n$. Soit $\psi\colon K \to \mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$ continue. Alors la fonction définie sur Ω, et prolongée par 0 en dehors de Ω, donnée par la formule $x \mapsto \varphi(x)\psi(x)$, s'identifie à une section de $(\mathcal{A}(H_x))_{x\in X}$ à support dans Ω. Ces sections munissent $(\mathcal{A}(H_x))_{x\in X}$ d'une structure de champ continu au-dessus de X, sur lequel G agit continûment: on reporte au Lemme 8.7 la démonstration de ce dernier point, en remarquant que $\mathcal{A}(H) = \mathcal{A}_0(H)$ avec la notation introduite plus loin.

LEMME 7.2. *G agit proprement sur $\mathcal{A}(H)$.*

Démonstration. Montrons-le dans le cas où G est un groupe pour simplifier les notations. Avec les notations de la section 6, pour tout sous-espace affine V de dimension finie, on a une inclusion $B(V \oplus V_0) \simeq C(V \oplus V_0) \otimes \mathbb{C} \otimes C(\mathbb{R}_+) \to C(T^*V) \otimes \mathcal{L}(\Lambda^*(V_0))\hat{\otimes} S = A(V)\hat{\otimes} S$. Il est clair que ces inclusions sont compatibles avec les systèmes inductifs, donc $C(Z)$ s'injecte dans $\mathcal{A}(H)$, où Z est l'espace de la section 6 associé à l'espace affine Euclidien $H \oplus H_0$ (H_0 est ici l'espace vectoriel sous-jacent à H). □

Pour construire le dual Dirac, nous avons tout d'abord besoin d'un préliminaire. Notons $f_0(t) = t(1+t^2)^{-1/2}$.

LEMME 7.3. *Soit A une C^*-algèbre a et b deux multiplicateurs autoadjoints non bornés* [7] *avec* $(1+a^2)^{-1} \in A$, $(1+b^2)^{-1} \in A$. *On a*

$$\begin{aligned}
&f_0(a) - f_0(b)\\
&\quad = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \lambda^{-1/2}(1+\lambda+a^2)^{-1}(a-b)\,\mathrm{d}\lambda +\\
&\qquad + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \lambda^{-1/2}(1+\lambda+a^2)^{-1}a(b-a)b(1+\lambda+b^2)^{-1}\,\mathrm{d}\lambda +\\
&\qquad + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \lambda^{-1/2}(1+\lambda+a^2)^{-1}(b-a)b^2(1+\lambda+b^2)^{-1}\,\mathrm{d}\lambda.
\end{aligned}$$

Démonstration. En effet,

$$f_0(a) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \lambda^{-1/2}a(1+\lambda+a^2)^{-1}\,\mathrm{d}\lambda$$

(pour démontrer cette formule, on se ramène à la démontrer pour $a \in \mathbb{R}$). □

LEMME 7.4. *Avec les mêmes hypothèses, si de plus $a - b$ est borné,* $\|f_0(a) - f_0(b)\| \leqslant 3\|a-b\|$.

Démonstration. Il suffit de montrer que chaque terme apparaissant dans le Lemme 7.3 est majoré en norme par $\|a-b\|$. Montrons-le par exemple pour le deuxième.

Soit $c(\lambda) = \lambda^{-1/2}(1+\lambda+a^2)^{-1}a(b-a)b(1+\lambda+b^2)^{-1}$.

On a

$$\begin{aligned}
c(\lambda) \;=\; &\lambda^{-1/2}(1+\lambda)^{-1/2}[(1+\lambda)^{1/2}(1+\lambda+a^2)^{-1/2}] \times\\
&\times [(1+\lambda+a^2)^{-1/2}a](b-a)[b(1+\lambda+b^2)^{-1/2}] \times\\
&\times [(1+\lambda+b^2)^{-1/2}(1+\lambda)^{1/2}](1+\lambda)^{-1/2},
\end{aligned}$$

donc

$$\|c(\lambda)\| \leqslant \lambda^{-1/2}(1+\lambda)^{-1/2} \times 1 \times 1 \times \|b-a\| \times 1 \times 1 \times (1+\lambda)^{-1/2},$$

d'où $\int_0^\infty \|c(\lambda)\|\,\mathrm{d}\lambda \leqslant \pi\|b-a\|$. □

LEMME 7.5. *Soit A une C^*-algèbre, a et b deux multiplicateurs non bornés autoadjoints de A vérifiant $b - a \in M(A)$ et $(1+b^2)^{-1} \in A$. Alors $(1+a^2)^{-1} \in A$ et $f_0(b) - f_0(a) \in A$.*

Démonstration.

$$\begin{aligned}&(1+a^2)^{-1} - (1+b^2)^{-1}\\ &\quad = (1+a^2)^{-1}(b^2-a^2)(1+b^2)^{-1}\\ &\quad = (1+a^2)^{-1}a(b-a)(1+b^2)^{-1}\\ &\qquad + (1+a^2)^{-1}(b-a)b(1+b^2)^{-1/2}(1+b^2)^{-1/2}\end{aligned}$$

Or,

$$(1+a^2)^{-1}a(b-a) \in M(A) \quad \text{et} \quad (1+a^2)^{-1}(b-a)b(1+b^2)^{-1/2} \in M(A),$$

donc $(1+a^2)^{-1} - (1+b^2)^{-1} \in A$, d'où la première assertion. Pour la deuxième, il suffit de montrer que chacun des trois termes apparaissant dans le Lemme 7.3 est dans A. Montrons-le par exemple pour le deuxième. Avec les notations de la démonstration du Lemme 7.4, on a

$$(1+\lambda+a^2)^{-1/2} \in A, \quad \text{et} \quad \begin{aligned}&[(1+\lambda+a^2)^{-1/2}a](b-a)\\ &[b(1+\lambda+b^2)^{-1}] \in M(A),\end{aligned}$$

donc $c(\lambda) \in A$. De plus, la démonstration du Lemme 7.4 montre que $\int_0^\infty c(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda$ converge absolument. □

Nous aurons besoin plus loin du résultat suivant:

LEMME 7.6. *Soit $\alpha \in]0, 1/2[$. Soit A une C^*-algèbre, a et b deux multiplicateurs non bornés autoadjoints de A vérifiant $(a-b)(1+a^2)^{-1/2+\alpha} \in A$ et $(1+a^2)^{-1} \in A$. Alors*

$$f_0(b) - f_0(a) \in A \quad \text{et} \quad \|f_0(b) - f_0(a)\| \leqslant C_\alpha \|(a-b)(1+a^2)^{-1/2+\alpha}\|.$$

Démonstration. Il suffit de montrer que $[(1+a^2)^{-1/2} - (1+b^2)^{-1/2}]b$ appartient à A et de majorer sa norme. Or, cet élément est égal à

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \lambda^{-1/2}(1+\lambda+a^2)^{-1}[a(b-a)+(b-a)b](1+\lambda+b^2)^{-1}b\,\mathrm{d}\lambda\\ &\quad = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \lambda^{-1/2}a(1+\lambda+a^2)^{-1/2-\alpha}(1+\lambda+a^2)^{-1/2+\alpha}(b-a)\times\\ &\qquad\quad \times(1+\lambda+b^2)^{-1/2}(1+\lambda+b^2)^{-1/2}b\,\mathrm{d}\lambda +\\ &\qquad +\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \lambda^{-1/2}(1+\lambda+a^2)^{-1/2-\alpha}(1+\lambda+a^2)^{-1/2+\alpha}(b-a)\times\\ &\qquad\quad \times b(1+\lambda+b^2)^{-1}b\,\mathrm{d}\lambda\end{aligned}$$

Donc, en désignant par C le réel $\|(a-b)(1+a^2)^{-1/2+\alpha}\|$, la norme de l'élément ci-dessus est majorée par

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \lambda^{-1/2}(1+\lambda)^{-\alpha}C(1+\lambda)^{-1/2}\,\mathrm{d}\lambda + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \lambda^{-1/2}(1+\lambda)^{-1/2-\alpha}C\,\mathrm{d}\lambda\\ &\quad\leqslant \frac{2C}{\pi}\int_0^\infty \lambda^{-1/2}(1+\lambda)^{-1/2-\alpha}\,\mathrm{d}\lambda.\end{aligned}$$

De plus, les intégrales convergent absolument, et on voit facilement que les intégrandes sont des éléments de A, d'où la conclusion. □

LEMME 7.7. *Soit A une C^*-algèbre, a b et c des multiplicateurs non bornés autoadjoints de A et $a' = a + c$, $b' = b + c$. On suppose que a et c anticommutent, et que b et c anticommutent. De plus, on suppose que pour tout $k > 1$, on a $\|(a^k - b^k)(1+a^2)^{-(k-1)/2}\| \leqslant C_k\|a-b\|$ où les C_k sont des réels. Alors pour tout $k > 1$, il existe des réels C'_k ne dépendant que des C_j pour $j \leqslant k$ tels que*

$$\|(a'^k - b'^k)(1+a'^2)^{-(k-1)/2}\| \leqslant C'_k\|a-b\|.$$

Démonstration. Soit $k > 1$. D'après les hypothèses d'anticommutativité, il existe des constantes α_j telles que $a'^k = \sum \alpha_j a^j c^{k-j}$ et $b'^k = \sum \alpha_j b^j c^{k-j}$, donc

$$\begin{aligned}&\|(a'^k - b'^k)(1+a'^2)^{-(k-1)/2}\|\\ &\quad= \left\|\sum \alpha_j(a^j - b^j)c^{k-j}(1+a^2+c^2)^{-(k-1)/2}\right\|\\ &\quad\leqslant \sum |\alpha_j|\|(a^j-b^j)(1+a^2)^{-(j-1)/2}\|\|c^{k-j}(1+c^2)^{-(k-j)/2}\|\\ &\quad\leqslant \sum |\alpha_j|C_j\|a-b\|.\end{aligned}$$ □

Passons à la construction du dual Dirac $\eta \in KK_G(C(X), \mathcal{A}(H))$. Supposons pour simplifier les notations que G est un groupe. Choisissons une origine $a \in H$. Le multiplicateur non borné T de S d'identifie à un multiplicateur non borné T_a de $\mathcal{A}(H)$ via l'identification $S \simeq A(\{a\})\hat{\otimes}S$. Il est facile de voir que T_a est autoadjoint, à résolvante compacte puisque $(1+T_a^2)^{-1} \in A(\{a\})\hat{\otimes}S \subset \mathcal{A}(H)$, et que si b est une autre origine, $T_a - T_b$ est borné de norme $\|b-a\|$.

L'opérateur $f_0(T_a)$ est G-invariant modulo $\mathcal{A}(H)$ d'après le Lemme 7.5, et il est G-continu d'après le Lemme 7.4 (en effet, ce lemme implique que $\|g\cdot f_0(T_a) - f_0(T_a)\| \leqslant 3\|g\cdot a - a\|$). Par conséquent, l'opérateur $f_0(T_a)$ agissant dans le $\mathcal{A}(H)$-module Hilbertien $\mathcal{A}(H)$ définit bien un élément $\eta \in KK_G(\mathbb{C}, \mathcal{A}(H))$.

8. L'élément de Dirac

Dans cette section, on indique comment s'obtient l'élément de Dirac $D \in KK_G(\mathcal{A}(H), C(X))$. Pour simplifier les notations, on supposera que G est un groupe, mais tous les résultats de cette section restent valables pour un groupoïde localement compact avec système de Haar.

L'idée d'utiliser une extension de $\mathcal{A}(H)$ par les compacts est due à [24].

Dans ce qui suit, on suppose que G agit continûment par isométries affines sur un espace Euclidien H. On note $g \cdot \xi = \alpha_g(\xi) + b(g)$, où α est l'action linéaire associée et b est un cocycle, c'est-à-dire $b(gh) = \alpha_g(b(h)) + b(g)$.

On note toujours f_0 la fonction $f_0(t) = t(1+t^2)^{-1/2}$.

8.1. QUELQUES NOTATIONS

Soit W un espace Euclidien réel de dimension finie. Soit $\Lambda^* W$ l'algèbre extérieure complexe de W. On désigne par d l'opérateur (non borné) de différentiation agissant dans $L^2(W, \Lambda^* W)$. Pour tout $x \in W$, notons $e(x)\colon \Lambda^* W \to \Lambda^* W$ la multiplication extérieure par x, et $c(x) = e(x) + e(x)^*$ la multiplication de Clifford. Notons e et c les opérateurs sur $L^2(W, \Lambda^* W)$ définis par $(e(\omega))(x) = e(x)\omega(x)$ et $(c(\omega))(x) = c(x)\omega(x)$. Pour tout $t > 0$, soit $D_{W,t} = t(d + d^*) + c$.

Remarquons que l'opérateur D_1 est celui de l'oscillateur harmonique: sur l'espace Hilbertien gradué $L^2(\mathbb{R}) \oplus L^2(\mathbb{R})$, il a pour matrice

$$\begin{bmatrix} 0 & x - \mathrm{d}/\mathrm{d}x \\ x + \mathrm{d}/\mathrm{d}x & 0 \end{bmatrix}.$$

Si $V \subset H$ est un sous-espace affine de dimension finie, on a une extension

$$0 \to \mathcal{K}(L^2(V))]0,1] \to C^*(V_0, V, \alpha_t)_{t\in[0,1]} \to C(T^*V) \to 0,$$

où $\alpha_t(v_0) \cdot v = v + tv_0$ définit une action continue du groupe V_0 sur l'espace V, et $C^*(V_0, V, \alpha_0) = C^*(V_0) \otimes C(V) \simeq C(V_0^*) \otimes C(V) \simeq C(T^*V)$. En tensorisant par $\mathcal{L}(\Lambda^* V_0)\hat{\otimes} S$, on obtient une extension

$$0 \to (E_{V,t})_{t\in]0,1]}\hat{\otimes} S \to E_V \hat{\otimes} S \to A(V)\hat{\otimes} S \to 0,$$

avec $E_{V,t} = \mathcal{K}(L^2(V, \Lambda^* V_0))$ si $t \in]0,1]$.

Si H est un espace Hilbertien, on note $\mathcal{A}_t(H)$ la limite inductive suivant les sous-espaces affines de dimension finie V des algèbres $E_{V,t}\hat{\otimes} S$. La relation de récurrence est la suivante: si $V' = V \overset{\perp}{\oplus} W$, on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & (E_{V,t})_{t\in]0,1]}\hat{\otimes} S \arrow[r] \arrow[d] & E_V\hat{\otimes} S \arrow[r] \arrow[d, "\psi_{V,V'}"] & A(V)\hat{\otimes} S \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & (E_{V',t})_{t\in]0,1]}\hat{\otimes} S \arrow[r] & E_V\hat{\otimes} S \arrow[r] & A(V')\hat{\otimes} S \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

avec $\psi_{V,V',t}(a\hat{\otimes} f) = a\hat{\otimes} f(1\hat{\otimes} T + D_{W,t}\hat{\otimes} 1)$.

On obtient donc à la limite l'extension

$$0 \to (\mathcal{A}_t(H))_{t\in]0,1]} \to (\mathcal{A}_t(H))_{t\in[0,1]} \to \mathcal{A}(H) \to 0.$$

Soit $\mathcal{H}_t$ la limite inductive des $L^2(V, \Lambda^* V_0)$ (espace des formes différentielles de carré intégrable sur l'espace affine de dimension finie V, considéré comme une variété Riemannienne).

Si $V' = V \overset{\perp}{\oplus} W$, l'identification est $\xi \mapsto \xi \otimes \xi_{W,t}$, où

$$\begin{aligned} \xi_{W,t}(w) &= (\pi t)^{-\dim W/4} e^{-\|w\|^2/2t} \\ &\in L^2(W) \subset L^2(W, \Lambda^* W) \end{aligned}$$

est un vecteur unitaire.

Comme $\xi_{W,t}$ est dans le noyau de $D_{W,t}$, $\mathcal{A}_t(H)$ agit dans $\mathcal{H}_t$ de la façon suivante: soit $a \in E_{V,t}$, $\xi \in L^2(V, \Lambda^* V_0)$ et $f, h \in S$. On définit $(a \hat{\otimes} f) \cdot (\xi \hat{\otimes} h) = a\xi \hat{\otimes} fh$, où l'on identifie $E_{V,t}$ à $\mathcal{K}(L^2(V, \Lambda^* V_0))$.

8.2. EXPOSÉ DU PROBLÉME

On va essayer de construire l'élément de Dirac à partir d'une extension de $\mathcal{A}(H)$ par les compacts. L'idée est d'utiliser l'extension

$$0 \to (\mathcal{A}_t(H))_{t \in]0,1]} \to (\mathcal{A}_t(H))_{t \in [0,1]} \to \mathcal{A}(H) \to 0,$$

mais, $\mathcal{A}_t(H)$, bien que limite inductive des $\mathcal{K}(L^2(V, \Lambda^* V_0)) \hat{\otimes} S$, n'est pas égal à $\mathcal{K}(\mathcal{H}_t) \hat{\otimes} S$.

L'idée est de perturber l'opérateur $D_{W,t}$ de façon à obtenir à la limite un opérateur à résolvante compacte.

On aura besoin de construire de façon fonctorielle, pour tout espace vectoriel Euclidien H et tout opérateur autoadjoint non-borné à résolvante compacte $\Theta \ \eta \ \mathcal{L}(H)$ un opérateur $B_t(\Theta) \ \eta \ \mathcal{L}(\mathcal{H}_t)$ vérifiant:

LEMME 8.1.

(i) $B_t(\Theta)$ *est à résolvante compacte*;
(ii) $B_t(1_W) = D_{W,t}$ *si W est de dimension finie*;
(iii) $B_t(\Theta_1 \oplus \Theta_2) = B_t(\Theta_1) \hat{\otimes} 1 + 1 \hat{\otimes} B_t(\Theta_2)$;
(iv) $B_t(\Theta)$ *commute avec* $B_t(1)^2$;
(v) $B_t(\lambda\Theta_1 + \Theta_2) = \lambda B_t(\Theta_1) + B_t(\Theta_2)$;
(vi) Si $0 \leqslant \Theta_1 \leqslant \Theta_2$ et Θ_1, Θ_2 *commutent, alors* $B_t(\Theta_1)^2 \leqslant B_t(\Theta_2)^2$.

Toutes les assertions du lemme qui précède résulteront de la linéarité de $\Theta \mapsto B_t(\Theta)$ et du

LEMME 8.2. *Si* $\Theta = \mathrm{Diag}(\lambda_i)$, *alors* $B_t(\Theta) = \sum \lambda_i D_{\mathbb{R}\cdot e_n, t}$.

L'objectif des quelques paragraphes suivants est de construire $B_t(\Theta)$ et de démontrer ces lemmes.

8.3. CONSTRUCTION DE $B_t(\Theta)$

Soit H un espace Euclidien. Soit Θ un opérateur autoadjoint non borné sur H. Pour tout sous-espace vectoriel de dimension finie $V \subset \mathrm{Dom}(\Theta)$, on considère l'opérateur non borné $d_\Theta\colon L^2(V)\otimes\Lambda^*H \to L^2(V)\otimes\Lambda^*H$ obtenu de la manière suivante: si $\xi \in C_c^\infty(V)$, on a $\mathrm{d}\xi \in L^2(V)\otimes\Lambda^1 V$ et $\Theta_{|V}$ induit une application de $\Lambda^1 V$ dans $\Lambda^1 H \subset \Lambda^* H$, d'où $(1\otimes\Theta)(\mathrm{d}\xi) \in L^2(V)\otimes\Lambda^*H$. On prolonge l'opérateur $C_c^\infty(V)\otimes\Lambda^0 H \to L^2(V)\otimes\Lambda^*H$ en un opérateur

$$\begin{aligned} \mathrm{d}_{\Theta,V}\colon C_c^\infty(V)\hat{\otimes}\Lambda^*H &\to L^2(V)\otimes\Lambda^*H \\ \xi\otimes\omega &\mapsto \mathrm{d}_\Theta\xi\wedge\omega. \end{aligned}$$

On obtient ainsi un opérateur non borné

$$\mathrm{d}_{\Theta,V} + (d_{\Theta,V})^*\colon L^2(V)\otimes\Lambda^*H \to L^2(V)\otimes\Lambda^*H.$$

De même, soit, pour tout $x \in H$, $e(x) \in \mathcal{L}(\Lambda^*H)$ le produit extérieur par x: $e(x)\omega = x\wedge\omega$. Soit $c(x) = e(x)+e(x)^*$ la multiplication de Clifford. On définit l'opérateur non borné $c_{\Theta,V}\colon L^2(V)\otimes\Lambda^*H \to L^2(V)\otimes\Lambda^*H$ par

$$\forall\xi \in C_c^\infty(V,\Lambda^*H),\ \forall x\in V,\ (c_{\Theta,V}\xi)(x) = c(\Theta(x)).\xi(x).$$

Avec des notations évidentes, on a $c_{\Theta,V} = e_{\Theta,V} + (e_{\Theta,V})^*$.

Fixons $t > 0$. Pour abréger, on écrira ξ_W au lieu de $\xi_{W,t}$. Soit $D_{\Theta,V} = t(d_{\Theta,V} + (d_{\Theta,V})^*) + c_{\Theta,V}$. Il n'est pas tout à fait vrai que les $D_{\Theta,V}$ passent à la limite inductive. Néanmoins, on obtient un opérateur non borné D_Θ de $\mathcal{H}_t$ dans lui-même, que nous noterons aussi $B_t(\Theta)$, de la façon suivante: soit $V \subset \mathrm{Dom}\,\Theta$. Soit $\xi \in L^2(V,\Lambda^*V)$. Alors pour tout W de dimension finie avec $W \subset V^\perp \cap \mathrm{Dom}\,\Theta$ et $\Theta(V) \subset V\oplus W$, l'élément $D_{\Theta,V\oplus W}(\xi\otimes\xi_W) \in L^2(V \overset{\perp}{\oplus} W)\otimes\Lambda^*H \subset \mathcal{H}_t$ ne dépend pas du choix de W. Pour le voir, posons $V_1 = V\overset{\perp}{\oplus} W$. Il suffit de démontrer que si $W' \subset V_1^\perp \cap \mathrm{Dom}(\Theta)$, on a $D_{\Theta,V_1}(\xi\otimes\xi_W) = D_{\Theta,V_1\oplus W'}(\xi\otimes\xi_W\otimes\xi_{W'})$. Comme $\Theta(V)\subset V\overset{\perp}{\oplus} W$, on a, dans la décomposition $H = V\overset{\perp}{\oplus} W \overset{\perp}{\oplus} V_1^\perp$,

$$\Theta = \begin{bmatrix} * & * & 0 \\ * & * & * \\ 0 & * & * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * & * & 0 \\ * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{bmatrix} = \Theta_1 + \Theta_2.$$

Notons $\xi' = \xi\otimes\xi_W$. Supposons montrés

$$D_{\Theta_1,V_1\oplus W'}(\xi'\otimes\xi_{W'}) = D_{\Theta_1,V_1}(\xi')\otimes\xi_{W'}, \tag{1}$$

$$D_{\Theta_2,V_1\oplus W'}(\xi'\otimes\xi_{W'}) = 0, \tag{2}$$

$$D_{\Theta_2,V_1}(\xi') = 0. \tag{3}$$

Alors on obtient

$$D_{\Theta,V_1\oplus W'}(\xi'\otimes\xi_{W'}) = D_{\Theta,V_1}(\xi')\otimes\xi_{W'},$$

donc $D_{\Theta,V_1\oplus W'}(\xi'\otimes\xi_{W'})$ et $D_{\Theta,V_1}(\xi')$ s'identifient dans $\mathcal{H}_t$.

Il reste à montrer (1), (2) et (3). On peut supposer que $\xi = \eta \otimes \omega$, où $\eta \in C_c^\infty(V)$ et $\omega \in \Lambda^* V \subset \Lambda^* H$.

(1): $d_{\Theta_1, V_1 \oplus W'}(\xi' \otimes \xi_{W'}) = d_{\Theta_1, V_1 \oplus W'}(\eta \xi_{W'} \omega) = d_{\Theta_1, V_1}(\eta\omega) \otimes \xi_{W'}$ car $\Theta_{1|W'} = 0$. De même,

$$
\begin{aligned}
&(d_{\Theta_1, V_1 \oplus W'})^*(\xi' \otimes \xi_{W'}) = (d_{\Theta_1, V_1})^*(\eta\omega) \otimes \xi_{W'},\\
&e_{\Theta_1, V_1 \oplus W'}(\xi' \otimes \xi_{W'}) = e_{\Theta_1, V_1}(\xi') \otimes \xi_{W'},\\
&(e_{\Theta_1, V_1 \oplus W'})^*(\xi' \otimes \xi_{W'}) = (e_{\Theta_1, V_1})^*(\xi') \otimes \xi_{W'}.
\end{aligned}
$$

(2) et (3): nous allons montrer que $\forall \xi \in C_c^\infty(V) \otimes \Lambda^* V$, $\forall W \subset V^\perp$, $\forall \Theta_2$ vérifiant $\Theta_{2|V} = 0$, on a $D_{\Theta_2, V \oplus W}(\xi \otimes \xi_W) = 0$.

On voit facilement que

$$
\begin{aligned}
d_{\Theta_2, V \oplus W}(\eta \otimes \xi_W \omega) &= \eta \otimes d_{\Theta_2, W}(\xi_W \omega) \qquad \text{car } \Theta_{2|V} = 0\\
&= \eta \otimes (d_{\Theta_2, W} \xi_W) \wedge \omega,\\
(d_{\Theta_2, V \oplus W})^*(\eta \otimes \xi_W \omega) &= \eta \otimes (d_{\Theta_2, W})^*(\xi_W \omega)\\
&= 0 \quad \text{car } \omega \in \Lambda^* V \quad \text{et} \quad \Theta_{2|V} = 0,\\
e_{\Theta_2, V \oplus W}(\eta \otimes \xi_W \omega) &= \eta \otimes (e_{\Theta_2, W} \xi_W) \wedge \omega,\\
(e_{\Theta_2, V \oplus W})^*(\eta \otimes \xi_W \omega) &= \eta \otimes (e_{\Theta_2, W})^*(\xi_W \omega)\\
&= 0 \quad \text{car } \omega \in \Lambda^* V \quad \text{et} \quad \Theta_{2|V} = 0.
\end{aligned}
$$

Donc

$$
D_{\Theta_2, V \oplus W}(\eta \otimes \xi_W \omega) = \eta \otimes (t d_{\Theta_2, W} + e_{\Theta_2, W})(\xi_W) \wedge \omega.
$$

Or,

$$
(t d_{\Theta_2, W} + e_{\Theta_2, W})(\xi_W) = \sum_i \lambda_i \left\{ t \left(\frac{\partial \xi_W}{\partial x_i} \right) \mathrm{d}x_i + x_i \xi_W \, \mathrm{d}x_i \right\} = 0
$$

(en prenant une base (e_i) de V telle que $\Theta(e_i) = \lambda_i e_i$), donc on obtient bien les conditions (2) et (3).

Le Lemme 8.2 est alors évident (on se ramène au cas où H est de dimension 1). Comme $\Theta \mapsto B_t(\Theta)$ est linéaire, les assertions du Lemme 8.1 sont claires. $\square$

LEMME 8.3. *Si* $\Theta_1, \Theta_2 \geqslant 1$ *et* $\Theta_2 - \Theta_1$ *est borné, alors*

$$
\| f_0(1 \hat{\otimes} T + B_t(\Theta_1) \hat{\otimes} 1) - f_0(1 \hat{\otimes} T + B_t(\Theta_2) \hat{\otimes} 1) \| \leqslant 3 \| \Theta_1 - \Theta_2 \|.
$$

Démonstration. La démonstration est analogue à celle du Lemme 7.4. Soit $\mathcal{C}_1 = \mathbb{C} \cdot 1 \oplus \mathbb{C}\varepsilon$ la première algèbre de Clifford. Il suffit de montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$
\| f_0(1 \hat{\otimes} x\varepsilon + B_t(\Theta_1) \hat{\otimes} 1) - f_0(1 \hat{\otimes} x\varepsilon + B_t(\Theta_2) \hat{\otimes} 1) \| \leqslant 3 \| \Theta_1 - \Theta_2 \|.
$$

Nous allons utiliser le Lemme 7.3, en majorant chacun des trois termes. Notons $C_t = B_t(1)^2$.

$$\begin{aligned}
&\left\| \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \lambda^{-1/2}(1+\lambda+x^2+B_t(\Theta_1)^2\hat{\otimes}1)^{-1}(B_t(\Theta_1-\Theta_2))\hat{\otimes}1 \, \mathrm{d}\lambda \right\| \\
&\quad\leqslant \sup_{\mu\in \mathrm{Sp}(C_t)} \frac{1}{\pi} \left\| \int_0^\infty \lambda^{-1/2}(1+\lambda+x^2+B_t(\Theta_1)^2\hat{\otimes}1)^{-1}(1+\lambda+x^2+C_t\hat{\otimes}1) \times \right. \\
&\qquad \left. \times (1+\lambda+x^2+C_t\hat{\otimes}1)^{-1}(B_t(\Theta_1-\Theta_2)\hat{\otimes}1)_{|\ker C_t-\mu} \, \mathrm{d}\lambda \right\| \quad \text{(cf. Lemme 8.1(iv))} \\
&\quad\leqslant \sup_{\mu\in \mathrm{Sp}(C_t)} \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \lambda^{-1/2}\|(1+\lambda+x^2+B_t(\Theta_1)^2\hat{\otimes}1)^{-1}(1+\lambda+x^2+C_t\hat{\otimes}1)\| \times \\
&\qquad \times \|(1+\lambda+x^2+C_t\hat{\otimes}1)^{-1}(B_t(\Theta_1-\Theta_2)\hat{\otimes}1)_{|\ker C_t-\mu}\| \, \mathrm{d}\lambda \\
&\quad\leqslant \sup_{\mu\in \mathrm{Sp}(C_t)} \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \lambda^{-1/2}\|(1+\lambda+x^2+C_t\hat{\otimes}1)^{-2}(B_t(\Theta_1-\Theta_2)^2\hat{\otimes}1)_{|\ker C_t-\mu}\|^{1/2} \, \mathrm{d}\lambda \\
&\quad\leqslant \|\Theta_1-\Theta_2\| \frac{1}{\pi} \sup_{\mu\geqslant 0} \int_0^\infty \lambda^{-1/2}\|(1+\lambda+x^2+C_t\hat{\otimes}1)^{-2}(B_t(1)^2\hat{\otimes}1)_{|\ker C_t-\mu}\|^{1/2} \, \mathrm{d}\lambda \\
&\qquad \text{(cf. Lemme 8.4(vi))} \\
&\quad\leqslant \|\Theta_1-\Theta_2\| \frac{1}{\pi} \sup_{\mu\geqslant 0} \int_0^\infty \lambda^{-1/2} \frac{\sqrt{\mu}}{1+\lambda+x^2+\mu} \, \mathrm{d}\lambda \\
&\quad\leqslant \|\Theta_1-\Theta_2\| \sup_{\mu\geqslant 0} \frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{1+x^2+\mu}} \\
&\quad\leqslant \|\Theta_1-\Theta_2\|.
\end{aligned}$$

Pour le deuxième terme, on a de même

$$\begin{aligned}
&\left\| \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \lambda^{-1/2}(1+\lambda+x^2+B_t(\Theta_1)^2\hat{\otimes}1)^{-1} \times \right. \\
&\qquad \times (1\hat{\otimes}x\varepsilon+B_t(\Theta_1)\hat{\otimes}1)(B_t(\Theta_2-\Theta_1)\hat{\otimes}1) \times \\
&\qquad \left. \times (1\hat{\otimes}x\varepsilon+B_t(\Theta_2)\hat{\otimes}1)(1+\lambda+x^2+B_t(\Theta_2)^2\hat{\otimes}1)^{-1} \, \mathrm{d}\lambda \right\| \\
&\quad= \left\| \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \lambda^{-1/2}[(1+\lambda+x^2+B_t(\Theta_1)^2\hat{\otimes}1)^{-1/2}(1\hat{\otimes}x\varepsilon+B_t(\Theta_1)\hat{\otimes}1)] \times \right. \\
&\qquad \times [(1+\lambda+x^2+B_t(\Theta_1)^2\hat{\otimes}1)^{-1/2}(1+\lambda+x^2+C_t\hat{\otimes}1)^{1/2}] \times \\
&\qquad \times [(1+\lambda+x^2+C_t\hat{\otimes}1)^{-1/2}(B_t(\Theta_2-\Theta_1)\hat{\otimes}1)(1+\lambda+x^2+C_t\hat{\otimes}1)^{-1/2}] \times \\
&\qquad \times [(1+\lambda+x^2+C_t\hat{\otimes}1)^{1/2}(1+\lambda+x^2+B_t(\Theta_2)^2\hat{\otimes}1)^{-1/2}] \times \\
&\qquad \left. \times [(1+\lambda+x^2+B_t(\Theta_2)^2\hat{\otimes}1)^{-1/2}(1\hat{\otimes}x\varepsilon+B_t(\Theta_2)\hat{\otimes}1) \, \mathrm{d}\lambda \right\| \\
&\leqslant \sup_{\mu\geqslant 0} \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \lambda^{-1/2}\|(1+\lambda+x^2+C_t\hat{\otimes}1)^{-1}(B_t(\Theta_2-\Theta_1)_{|\ker C_t-\mu}\| \, \mathrm{d}\lambda
\end{aligned}$$

$$\leqslant \ \|\Theta_2 - \Theta_1\| \sup_{\mu \geqslant 0} \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \lambda^{-1/2} \frac{\sqrt{\mu}}{1+\lambda+x^2+\mu}\, \mathrm{d}\lambda$$
$$\leqslant \ \|\Theta_2 - \Theta_1\|,$$

et pour le troisième terme,

$$\Big\| \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \lambda^{-1/2} (1+\lambda+x^2+B_t(\Theta_1)^2 \hat{\otimes} 1)^{-1} (B_t(\Theta_2-\Theta_1)\hat{\otimes} 1) \times$$
$$\times (x^2 + B_t(\Theta_2)^2 \hat{\otimes} 1)(1+\lambda+x^2+B_t(\Theta_2)^2\hat{\otimes} 1)^{-1}\, \mathrm{d}\lambda \Big\|$$
$$= \Big\| \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \lambda^{-1/2} [(1+\lambda+x^2+B_t(\Theta_1)^2\hat{\otimes} 1)^{-1}(1+\lambda+x^2+C_t\hat{\otimes} 1)] \times$$
$$\times [(1+\lambda+x^2+C_t\hat{\otimes} 1)^{-1}(B_t(\Theta_2-\Theta_1)\hat{\otimes} 1)] \times$$
$$\times (x^2+B_t(\Theta_2)^2\hat{\otimes} 1)(1+\lambda+x^2+B_t(\Theta_2)^2\hat{\otimes} 1)^{-1}\, \mathrm{d}\lambda \Big\|$$
$$\leqslant \sup_{\mu \geqslant 0} \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \lambda^{-1/2} \|[(1+\lambda+x^2+C_t\hat{\otimes} 1)^{-1}(B_t(\Theta_2-\Theta_1)\hat{\otimes} 1)]_{|\ker C_t-\mu}\|\, \mathrm{d}\lambda$$
$$\leqslant \sup_{\mu \geqslant 0} \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \lambda^{-1/2} \frac{\sqrt{\mu}\|\Theta_2-\Theta_1\|}{1+\lambda+x^2+\mu}\, \mathrm{d}\lambda$$
$$\leqslant \|\Theta_2 - \Theta_1\|.$$

8.4. UN LEMME TECHNIQUE

PROPOSITION 8.4. *Soit H un espace Euclidien séparable muni d'une action continue par isométries affines d'un groupe localement compact G. Notons $g \cdot \xi = \alpha_g(\xi) + b(g)$ ($\xi \in H$) cette action, où α_g est l'action linéaire associée et b un cocycle. Alors il existe un opérateur Θ autoadjoint non-borné positif G-continu à résolvante compacte tel que pour tout compact K de G, il existe $C_K > 0$ vérifiant:*

$$\forall g \in K, \quad \|\Theta - g\cdot\Theta\| \leqslant C_K \quad \text{et} \quad \|\Theta(b(g))\| \leqslant C_K,$$

et de plus $\lim_{g\to e} \|\Theta(b(g))\| = 0$.

(on a noté $g \cdot \Theta = \alpha_g \Theta \alpha_g^{-1}$).

Démonstration. Soit $K_0 \subset \cdots \subset K_n \subset \cdots$ une suite exhaustive de compacts de G.

Soit $(e_n)_{n \geqslant 1}$ une base Hilbertienne de H, u_n la projection sur $\langle e_1, \ldots, e_n\rangle$. Comme pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\lim_{k\to\infty} \sup_{g \in K_m} \|(1-u_k)b(g)\| = 0$ (par compacité de $b(K_m)$), on peut, d'après le Lemme 4.3, construire par récurrence $v_n \in \mathrm{Conv}\{u_k\}_{k \geqslant n}$ vérifiant $v_n v_{n+1} = v_n$ et $\|g\cdot v_n - v_n\| \leqslant 2^{-n}$, $\|(1-v_n)(b(g))\| \leqslant 2^{-n}$ pour tout $g \in K_n$ (où $g \cdot v$ désigne $\alpha_g \circ v \circ \alpha_{g^{-1}}$).

La suite (v_n) est alors une unité approchée commutative de $\mathcal{K}(H)$. Posons $\Theta = \sum_{n\geqslant 0}(1-v_n)$. On voit, en considérant les v_n comme des fonctions continues sur un espace localement compact vérifiant $v_{n+1|\mathrm{Supp} v_n} = 1$, que Θ est bien défini, avec $(1+\Theta)^{-1} \in \mathcal{K}(H)$. De plus, $\|g\cdot\Theta - \Theta\| \leqslant 2n + 2^{-n+1}$ et $\|\Theta(b(g))\| \leqslant n\|b(g)\| + 2^{-n+1}$ $\forall g \in K_n$.

Pour la G-continuité, on utilise le fait que pour tout $g \in K_m$ et pour tout $n \leqslant m$,

$$\|g\cdot\Theta - \Theta\| \leqslant 2^{-n+1} + \sum_{k\leqslant n} \|g\cdot v_k - v_k\|.$$

La dernière assertion résulte de l'inégalité

$$\|\Theta(b(g))\| \leqslant 2^{-n+1} + \sum_{k\leqslant n} \|(1-v_k)(b(g))\|. \qquad \square$$

8.5. CONSTRUCTION D'UNE EXTENSION

Dans ce qui suit, on fixe $\Theta \in \mathcal{L}(H)$ autoadjoint positif non borné vérifiant les conditions de la Proposition 8.4. Si $H' \subset \mathrm{Dom}\,\Theta$, on note $\Theta_{H'}$ la compression de Θ à H'. Pour tout sous-espace affine $V \subset \mathrm{Dom}\,\Theta$ et $t \in (0,1]$, on désigne par $\Phi_{V,t}$ le morphisme

$$\begin{aligned} E_V\hat{\otimes}S &\to \mathcal{K}(\mathcal{H}_t)\hat{\otimes}S \\ a\hat{\otimes}f &\mapsto a_t\hat{\otimes}f(1\hat{\otimes}T + B_t(1_{V^\perp} + t\Theta_{V^\perp}\hat{\otimes}1)). \end{aligned}$$

Posons par convention, pour tout $\beta \in E_V\hat{\otimes}S$, $\Phi_{V,0}(\beta) = \beta(0) \in \mathcal{A}(H)$. Notons $\Phi_V(\beta)$ la section $t \mapsto \Phi_{V,t}(\beta)$ $(t \in [0,1])$. Soit $\mathcal{E}'_V$ l'ensemble des sections de la forme $\Phi_V(\beta)$ $(\beta \in E_V\hat{\otimes}S)$, $\mathcal{E}''$ l'ensemble des sections continues (tendant vers 0 en $t=0$) de $\mathcal{K}((\mathcal{H}_t)_{t\in(0,1]})\hat{\otimes}S$, $\mathcal{E}_V = \mathcal{E}'_V + \mathcal{E}''$, $\mathcal{E} = \cup_{V\subset\mathrm{Dom}\,\Theta}\mathcal{E}_V$.

Nous allons montrer que l'adhérence de $\mathcal{E}$ constitue un champ continu G-èquivariant de C^*-algèbres au-dessus de $[0,1]$ dont la fibre en 0 est $\mathcal{A}(H)$ et dont la fibre en $t>0$ est $\mathcal{K}(\mathcal{H}_t)\hat{\otimes}S$. On obtiendra ainsi une extension

$$0 \to (\mathcal{K}((\mathcal{H}_t)_{t\in(0,1]})) \to E \to \mathcal{A}(H) \to 0.$$

On doit montrer successivement

(1) $\mathcal{E}$ est une $*$-algèbre;
(2) $\forall\beta \in E_V\hat{\otimes}S$, $\lim_{t\to 0}\|\Phi_{V,t}(\beta)\| = \|\beta(0)\|$ (continuité du champ en 0);
(3) $\mathcal{E}$ est G-équivariant, i.e., $\forall g \in G$, $g\cdot\mathcal{E} = \mathcal{E}$;
(4) G agit continûment sur $\mathcal{E}$.

Montrons (1):

– $\mathcal{E}_V$ est une $*$-algèbre puisque $\Phi_{V,t}$ est un $*$-homomorphisme et $\mathcal{E}''$ est un idéal de $\mathcal{E}_V$.

– Si $V \subset V' = V \overset{\perp}{\oplus} W \subset \mathrm{Dom}\,(\Theta)$, alors $\mathcal{E}_V \subset \mathcal{E}_{V'}$. En effet, on a d'après le Lemme 8.1

$$B_t(1_{V^\perp} + t(0 \oplus \Theta_{V'^\perp})) = 1\hat{\otimes} B_t(1_{V'^\perp} + t\Theta_{V'^\perp}) + B_t(1_W)\hat{\otimes}1.$$

Puisque $\Phi_{V,t}$ se factorise à travers $E_{V,t}\hat{\otimes}S$, il résulte du Lemme 7.1 que $\Phi_{V',t} \circ \Psi_{V,V',t} = \Phi'_{V,t}$, où $\Phi'_{V,t}$ se définit comme $\Phi_{V,t}$ mais avec $0 \oplus \Theta_{V'^\perp}$ au lieu de $\Theta_{V^\perp}$.

Or, $(0 \oplus \Theta_{V'^\perp} - (\Theta_{V^\perp}))$ est borné puisque de rang fini, donc, d'après le lemme qui va suivre, on a, pour tout $\beta \in E_V\hat{\otimes}S$, $\lim_{t\to 0} \|(\Phi'_{V,t} - \Phi_{V,t})(\beta)\| = 0$, et donc $\Phi_V(\beta) \in \Phi_{V'}(\Psi_{V,V'}(\beta)) + \mathcal{E}''$.

LEMME 8.5. *Supposons Θ_1, Θ_2 autoadjoints positifs à résolvante compacte, avec $\Theta_1 - \Theta_2$ borné. Soit*

$$\begin{aligned} \Phi_{i,t} \colon S &\to \mathcal{K}(\mathcal{H}_t)\hat{\otimes}S \\ f &\mapsto f(1\hat{\otimes}T + B_t(1 + t\Theta_i)\hat{\otimes}1). \end{aligned}$$

Alors $\forall f \in S$, $\lim_{t\to 0} \|\Phi_{1,t}(f) - \Phi_{2,t}(f)\| = 0.$

Démonstration. On se ramène au cas où $f = h \circ f_0$, où h est un polynôme. Il suffit donc de montrer que $\| f_0(1\hat{\otimes}T + B_t(1+t\Theta_1)\hat{\otimes}1) - f_0(1\hat{\otimes}T + B_t(1+t\Theta_2)\hat{\otimes}1)\|$ tend vers 0 lorsque $t \to 0$. Or, cette quantité est majorée par $3t\|\Theta_1 - \Theta_2\|$ d'après le Lemme 8.3. ☐

Montrons (2): Supposons d'abord $V = \{0\}$. On doit prouver que

$$\|f\| = \lim_{t\to 0} \|f(1\hat{\otimes}T + B_t(1_{V^\perp} + t\Theta_{V^\perp}\hat{\otimes}1))\|,$$

ce qui est vrai puisque le spectre de $1\hat{\otimes}T + B_t(1_{V^\perp} + t\Theta_{V^\perp}\hat{\otimes}1)$ est $\mathbb{R}$.

Dans le cas général, ce qui précéde appliqué à l'espace Hilbertien $V^\perp$ au lieu de H montre que l'on a un champ continu

$$0 \to \mathcal{K}((\mathcal{H}_{t,V^\perp})_{t\in]0,1]})\hat{\otimes}S \to E'' \to S \to 0.$$

Comme le produit tensoriel de ce champ avec $(C^*(V_0, V, \alpha_t))_{t\in[0,1]}$ est encore un champ continu, et que $t \mapsto \Phi_{V,t}(\beta)$ en est une section, on obtient bien l'assertion désirée.

Montrons (3): Montrons que pour tout $g \in G$ et tout espace affine de dimension finie $V \subset \mathrm{Dom}\,(\Theta)$, on a $g \cdot \mathcal{E}'_V \subset \overline{\mathcal{E}_{g\cdot V}}$: en effet, pour tout $a \otimes f \in E_V$, on a

$$\begin{aligned} &g \cdot \Phi_{V,t}(a\hat{\otimes}f) = (g \cdot a_t)\hat{\otimes}f(1\hat{\otimes}T + B_t(1 + t(g\cdot\Theta)_{(g\cdot V)^\perp}\hat{\otimes}1)), \\ &\Phi_{g\cdot V,t}(g \cdot a\hat{\otimes}f) = (g \cdot a_t)\hat{\otimes}f(1\hat{\otimes}T + B_t(1 + t(\Theta)_{(g\cdot V)^\perp}\hat{\otimes}1)). \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} &\|g \cdot \Phi_{V,t}(a\hat{\otimes}f) - \Phi_{g\cdot V,t}(g \cdot a\hat{\otimes}f)\| \\ &\quad \leqslant \|a\| \times \|f(1\hat{\otimes}T + B_t(1 + t(g\cdot\Theta)_{(g\cdot V)^\perp}\hat{\otimes}1)) - \\ &\qquad\qquad - f(1\hat{\otimes}T + B_t(1 + t(\Theta)_{(g\cdot V)^\perp}\hat{\otimes}1))\|. \end{aligned}$$

Or, $(g\cdot\Theta-\Theta)_{(g\cdot V)^\perp}$ est borné (disons par $C>0$), donc d'après le Lemme 8.5 appliqué à $V^\perp$, le membre de droite de l'inégalité qui précède tend vers 0, donc $g\cdot\Phi_V(a\hat{\otimes} f)\in\overline{\mathcal{E}_{g\cdot V}}$. Par linéarité et continuité, on trouve $g\cdot\overline{\mathcal{E}_V}\subset\overline{\mathcal{E}_{g\cdot V}}\subset\mathcal{E}$, donc $g\cdot\mathcal{E}\subset\mathcal{E}$ et finalement, $g\cdot\mathcal{E}=\mathcal{E}$.

Montrons (4):

LEMME 8.6. *Si G agit continûment par isométries affines sur un espace de dimension finie V, alors G agit continûment sur E_V.*

Démonstration. En effet, $E_V=C(V\times[0,1])\rtimes V_0$. □

LEMME 8.7. *Si G agit continûment par isomûtries affines sur un espace Euclidien H, alors G agit continûment sur $\mathcal{A}_t(H)_{t\in[0,1]}$.*

Démonstration. Soit $\alpha\in E_V\hat{\otimes}S$. Il suffit de montrer que $\lim_{g\to e}\|g\cdot\alpha-\alpha\|=0$. Soit n la dimension de V. Supposons $g_i\to e$. Comme pour tout $g\in G$, V et $g\cdot V$ engendrent un espace affine de dimension inférieure ou égale à $2n+1$, en identifiant α à $\psi_{V,V\oplus\mathbb{R}^{n+1}}(\alpha)\in E_{V\oplus\mathbb{R}^{n+1}}\hat{\otimes}S$, on voit facilement qu'il existe des isométries h_i de $V\oplus\mathbb{R}^{n+1}$ avec $h_i\to e$ et $\|h_i\alpha-\alpha\|=\|g_i\alpha-\alpha\|$, donc on se ramène au Lemme 8.6. □

Supposons montré

(*) Pour tous $f_1, f_2\in C_c(\mathbb{R})$, $V\subset H$ de dimension finie et $a\in E_V$, l'élément $([a_t\hat{\otimes} f_1(1\hat{\otimes}T+D_{V^\perp,t}\hat{\otimes}1)]f_2(1\hat{\otimes}T+B_t(1+t\Theta)\hat{\otimes}1))_{t\in]0,1]}$ est G-continu.

Comme $(1\hat{\otimes}T+D_{V^\perp,t}\hat{\otimes}1)^2\leqslant(1\hat{\otimes}1\hat{\otimes}T+B_t(1+t\Theta)\hat{\otimes}1)^2$ et que ces opérateurs commutent, si f_2 est à support dans $[-c,c]$ et $f_1(x)=g(x^2)$ avec $g=1$ sur $[0,c^2]$, alors l'expression dans (*) vaut $((a_t\hat{\otimes}1)f_2(1\hat{\otimes}1\hat{\otimes}T+B_t(1+t\Theta)\hat{\otimes}1))_{t\in]0,1]}$.

Quitte à remplacer Θ par un opérateur dont la différence avec Θ est bornée, on peut supposer que $\Theta_{|V}=0$, donc l'élément $((a_t\hat{\otimes}1)f_2(1\hat{\otimes}T+D_{V,t}\hat{\otimes}1))_{t\in]0,1]}\in E_V\hat{\otimes}S$, identifié à son image dans la limite inductive, est G-continu.

Pour achever la démonstration, il reste à prouver que la C^*-algèbre engendrée par les éléments de la forme $((a_t\hat{\otimes}1)f_2(1\hat{\otimes}T+D_{V,t}\hat{\otimes}1))_{t\in]0,1]}$ est égale à $E_V\hat{\otimes}S$. Or, cette C^*-algèbre est engendrée par les

$$((a_t\hat{\otimes}1)f_1(D_{V,t}\hat{\otimes}1)f_2(1\hat{\otimes}T+D_{V,t}\hat{\otimes}1))_{t\in]0,1]},$$

donc il suffit de démontrer que pour toute C^*-algèbre $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-graduée A et tout $a=a^*$ de degré un, non borné, avec $(1+a^2)^{-1}\in A$, on a

$$C^*(\{f_1(a\hat{\otimes}1)f_2(1\hat{\otimes}T+a\hat{\otimes}1)|\ f_1, f_2\in C_c(\mathbb{R})\})=A\hat{\otimes}S.$$

Comme il existe un morphisme $S\to A$ tel que T ait pour image a, on se ramène au cas où $A=S$ et $T=a$.

Soit $B = C^*(\{f_1(T\hat{\otimes}1)f_2(1\hat{\otimes}T + T\hat{\otimes}1)|\ f_1, f_2 \in C_c(\mathbb{R})\})$. Cette C^*-algèbre est engendrée par les éléments de la forme

$$f_3(T^2\hat{\otimes}1)f_4(T^2\hat{\otimes}1 + 1\hat{\otimes}T^2)f_1(T\hat{\otimes}1)f_2(1\hat{\otimes}T + T\hat{\otimes}1),$$

pour $f_1, \dots, f_4 \in C_c(\mathbb{R})$. Comme

$$\begin{aligned} &C^*(\{f_3(T^2\hat{\otimes}1)f_4(T^2\hat{\otimes}1 + 1\hat{\otimes}T^2)|\ f_3, f_4 \in C_c(\mathbb{R})\}) \\ &\quad = C^*(\{\varphi(T^2\hat{\otimes}1, 1\hat{\otimes}T^2 + T^2\hat{\otimes}1)|\ \varphi \in C_0(\mathbb{R}^2)\}) \\ &\quad = C^*(\{\varphi(T^2\hat{\otimes}1, 1\hat{\otimes}T^2)|\ \varphi \in C_0(\mathbb{R}^2)\}), \end{aligned}$$

on voit que B est une sous-$C_0(\mathbb{R}^2_+)$-algèbre de $S\hat{\otimes}S$. Or, $S\hat{\otimes}S$ est un champ continu au-dessus de $\mathbb{R}^2_+$ donc on se ramène démontrer que

$$\forall\lambda, \mu > 0, \quad C^*(\{f_1(\lambda\varepsilon\hat{\otimes}1)f_2(\lambda\varepsilon\hat{\otimes}1 + \mu 1\hat{\otimes}\varepsilon)\}) = \mathcal{C}_1\hat{\otimes}\mathcal{C}_1,$$

en notant $\mathcal{C}_1 = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}\varepsilon$ la première algèbre de Clifford. Or, le membre de gauche contient $\lambda\varepsilon\hat{\otimes}1$ et $\lambda\varepsilon\hat{\otimes}1 + \mu 1\hat{\otimes}\varepsilon$, donc $\varepsilon\hat{\otimes}1$ et $1\hat{\otimes}\varepsilon$. Par conséquent, il est égal à $\mathcal{C}_1\hat{\otimes}\mathcal{C}_1$.

Il reste à montrer (*). En vertu du Lemme 8.7, $(a_t\hat{\otimes}f_1(1\hat{\otimes}T + D_{V^\perp,t}\hat{\otimes}1))_{t\in]0,1[}$ est G-continu, donc il suffit de prouver que pour tout $f \in C_0(\mathbb{R}_+)$, $(f(1\hat{\otimes}T + B_t(1+t\Theta)\hat{\otimes}1))_{t\in]0,1[}$ est G-continu. Si l'action de G sur H est linéaire, la question est réglée par le Lemme 8.3. Il reste à traiter le cas de la translation.

LEMME 8.8. *Si τ_v est la translation de vecteur v, alors pour tout $t \in]0, 1]$,*

$$\|f_0(1\hat{\otimes}T + B_t(1+t\Theta)\hat{\otimes}1) - \tau_v \cdot f_0(1\hat{\otimes}T + B_t(1+t\Theta)\hat{\otimes}1)\| \leqslant 3\|\Theta(v)\|.$$

Démonstration. En effet, on utilise $\|B_t(\Theta_1) - \tau_v \cdot B_t(\Theta_1)\| = \|\Theta_1(v)\|$ et le Lemme 7.4. □

En raisonnant comme dans la preuve du Lemme 8.5, on obtient la G-continuité de $f(1\hat{\otimes}T + B_t(1+t\Theta)\hat{\otimes}1)$. □

8.6. L'ÉLÉMENT DE DIRAC

Notons $h_0\colon E \to \mathcal{A}(H)$ et $h_t\colon E \to \mathcal{K}(\mathcal{H}_t)\hat{\otimes}S$ $(t > 0)$ les morphismes d'évaluation, où E est l'algèbre du milieu dans l'extension construite en 8.5. D'après la suite exacte à six termes (cf. Proposition 5.1), comme $\mathcal{A}(H)$ est nucléaire et que c'est une $C(Z)\rtimes G$-algèbre, où l'action de G sur Z est propre (cf. Lemme 7.2),

$$(h_0)_*\colon KK_G(\mathcal{A}(H), E) \to KK_G(\mathcal{A}(H), \mathcal{A}(H))$$

est un isomorphisme. Soit $D' = (h_0)_*^{-1}(1_{\mathcal{A}(H)}) \otimes_E [h_1] \in KK_G(\mathcal{A}(H), S)$, et $D = D' \otimes_S [ev_0]$, où $ev_0\colon S \to \mathbb{C}$ est l'évaluation en 0. On appelle D l'élément de Dirac. Notons $\gamma = \eta \otimes_{\mathcal{A}(H)} D$. Nous allons voir que $\gamma = 1$.

9. Conclusion

Soit G un groupoïde localement compact (séparé) avec système de Haar agissant proprement sur un champ continu d'espaces affines Euclidiens, $X = G^{(0)}$. Nous avons obtenu des éléments $\eta \in KK_G(C(X), \mathcal{A}(H))$ et $D \in KK_G(\mathcal{A}(H), C(X))$. Posons $\gamma = \eta \otimes_{\mathcal{A}(H)} D$. Nous aurons besoin de quelques préliminaires.

9.1. CONSTRUCTION D'UN ÉLÉMENT $\tilde{\eta} \in KK_G(C(X), E)$

On suppose pour simplifier les notations que G est un groupe. Soit Θ vérifiant les hypothèses de la Proposition 8.4. Choisissons une origine arbitraire, ce qui permet d'identifier H à un espace vectoriel. Nous écrirons D_t au lieu de $D_{\{0\},t}$, etc. Posons

$$\tilde{D}_t = 1\hat{\otimes}T + tD_t^3\hat{\otimes}1 + B_t(1+t\Theta)\hat{\otimes}1$$

pour $t \in]0,1]$, et $\tilde{D}_0 = 1\hat{\otimes}T + \beta\hat{\otimes}1$. Nous allons montrer que $(E, \tilde{D}_t)$ définit un $\mathbb{C}$, E bimodule de Kasparov équivariant non-borné. $\tilde{\eta}$ sera alors défini par la classe de ce bimodule dans $KK_G(C(X), E)$. Toujours en notant $f_0(t) = t(1+t^2)^{-1/2}$, soit $\tilde{F}_t = f_0(\tilde{D}_t)$. On doit montrer que

(i) $\tilde{F}$ définit bien un élément de $\mathcal{L}(E)$;
(ii) $\tilde{F}$ est G-continu et invariant modulo les compacts.

Montrons i: Soit α un élément de E. Il faut montrer que $(f_0(\tilde{D}_t)\alpha_t)_{t\in[0,1]}$ est aussi un élément de E. Comme dans le paragraphe 8.5, on se ramène au cas où α est de la forme

$$f_2(1\hat{\otimes}T + B_t(1+t\Theta)\hat{\otimes}1)[a_t\hat{\otimes}f_1(1\hat{\otimes}T + D_{V^\perp,t}\hat{\otimes}1)]$$

où V est un sous-espace de dimension finie et $a \in E_V$ et $f_1, f_2 \in C_c(\mathbb{R})$. Comme $1\hat{\otimes}T^2 + D_t^2\hat{\otimes}1 \leqslant (1\hat{\otimes}T + B_t(1+t\Theta)\hat{\otimes}1)^2$ et que ces éléments commutent, l'élément α ci-dessus est égal à $f(1\hat{\otimes}T^2 + D_t^2\hat{\otimes}1)\alpha$ si $f(t^2) = 1$ pour tout t appartenant au support de f_2.

Il suffit donc de montrer que les deux éléments suivants appartiennent à E:

(i) $f_0(B_t(1+t\Theta) + 1\hat{\otimes}T)f(1\hat{\otimes}T^2 + D_t^2\hat{\otimes}1)\alpha$;
(ii) $(f_0(\tilde{D}_t) - f_0(B_t(1+t\Theta) + 1\hat{\otimes}T))f(1\hat{\otimes}T^2 + D_t^2\hat{\otimes}1)\alpha$.

Pour le premier, c'est évident, puisque $f_0(B_t(1+t\Theta) + 1\hat{\otimes}T)$ appartient à E.

Pour le deuxième, il, suffit de montrer que sa norme tend vers 0 lorque t tend vers 0, ou encore que

$$\|(f_0(\tilde{D}_t) - f_0(B_t(1+t\Theta) + 1\hat{\otimes}T))f(1\hat{\otimes}T^2 + D_t^2\hat{\otimes}1)\|$$

tend vers 0.

Or, si f est à support compact dans $[-c^2, c^2]$, on peut restreindre les opérateurs à la somme des sous-espaces propres de D_t pour les valeurs propres dans $[-c, c]$. Sur ce sous-espace, on a

$$\|\tilde{D}_t - (B_t(1+t\Theta) + 1\hat{\otimes}T)\| \leqslant tc^3,$$

donc d'après le Lemme 7.4,

$$\|(f_0(\tilde{D}_t) - f_0(B_t(1+t\Theta) + 1\hat{\otimes}T))f(1\hat{\otimes}T^2 + D_t^2\hat{\otimes}1)\| \leqslant 3tc^3,$$

ce qui achève la démonstration de (i).

Montrons ii: Commençons par un lemme préliminaire:

LEMME 9.1.

$$[tD_t^3 + B_t(\Theta)]^2 \geqslant t^2D_t^6 + B_t(\Theta)^2.$$

Démonstration. Comme D_t^2 commute avec tous les opérateurs, on se ramène à démontrer cette assertion sur un sous-espace propre de D_t^2 pour la valeur propre $\mu > 0$. Diagonalisons Θ sur une base orthonormale, et notons λ_i les valeurs propres. Alors $B_t(\Theta)$ est de la forme $\sum \lambda_i D_i$, où les D_i anticommutent deux à deux. On a donc

$$\begin{aligned}
[tD_t^3 + B_t(\Theta)]^2 &= [\mu t D_t + B_t(\Theta)]^2 \\
&= [B_t(\mu t + \Theta)]^2 \\
&= \sum (\mu t + \lambda_i)^2 D_i^2 \\
&\geqslant \sum (\mu^2 t^2 + \lambda_i^2) D_i^2 \\
&= \mu^2 t^2 D_t^2 + B_t(\Theta)^2 \\
&= t^2 D_t^6 + B_t(\Theta)^2. \qquad \square
\end{aligned}$$

Une application affine pouvant être décomposée comme composition d'une application linéaire et d'une translation, nous allons étudier séparément les deux composantes.

Supposons que l'élément g agit linéairement. Comme, par hypothèse, $\|g \cdot \Theta - \Theta\|$ tend vers 0 lorsque g tend vers 1 élément neutre g, il suffit de montrer que l'opérateur $g \cdot \tilde{F} - \tilde{F}$ est compact et de majorer sa norme par $C\|g\Theta - \Theta\|$ où C est une constante. Comme l'opérateur D_t est invariant par g, il suffit, étant donné le Lemme 7.6, de montrer qu'il existe $\alpha > 0$ et une constante $C_\alpha > 0$ telle que pour tous Θ_1 et Θ_2 vérifiant les mêmes propriétés que Θ, avec $\Theta_1 - \Theta_2$ borné, on ait

$$(B_t(\Theta_1 - \Theta_2)\hat{\otimes}1)(1 + 1\hat{\otimes}T^2 + (tD_t^3 + B_t(1 + t\Theta_1))^2\hat{\otimes}1)^{-1/2+\alpha}$$

est compact, et de norme $\leqslant C_\alpha\|\Theta_1 - \Theta_2\|$ (et le résultat s'appliquera à Θ et $g \cdot \Theta$).

Il suffit donc de montrer, puisque $B_t(\Theta_1 - \Theta_2)^2 \geqslant \|\Theta_1 - \Theta_2\|^2 D_t^2$, que

$$(D_t^2\hat{\otimes}1)^{1/2}(1 + 1\hat{\otimes}T^2 + (tD_t^3 + B_t(1 + t\Theta_1))^2\hat{\otimes}1)^{-1/2+\alpha}$$

est compact et de norme majorée par une constante ne dépendant que de α. Or, pour tout $t \leqslant 1$,

$$\begin{aligned}
t(D_t^2\hat{\otimes}1)^{1/2} &\leqslant t^{1/3}(D_t^2\hat{\otimes}1)^{1/2} \\
&= (t^2D_t^6\hat{\otimes}1)^{1/6} \\
&\leqslant (1 + 1\hat{\otimes}T^2 + t^2D_t^6 + B_t(1 + t\Theta_1)^2\hat{\otimes}1)^{1/6}
\end{aligned}$$

Donc il suffit que

$$(1 + 1\hat{\otimes}T^2 + (t^2 D_t^6 + B_t(1 + t\Theta_1)^2)\hat{\otimes}1)^{-1/2+1/6+\alpha}$$

soit compact, et de norme majorée par une constante ne dépendant que de α, ce qui est le cas si $0 < \alpha < 1/3$.

Etudions maintenant la partie translation: sous l'action de la translation τ_ξ de vecteur ξ,

$$\|\tau_\xi \cdot B_t(1 + t\Theta) - B_t(1 + t\Theta)\| \leqslant t\|\Theta(\xi)\|$$

donc on se ramène à montrer que

$$f_0(1\hat{\otimes}T + t\tau_\xi \cdot D_t^3\hat{\otimes}1 + B_t(1 + t\Theta)\hat{\otimes}1) - \\ - f_0(1\hat{\otimes}T + tD_t^3\hat{\otimes}1 + B_t(1 + t\Theta)\hat{\otimes}1)$$

est compact, et de norme $\leqslant c\|\xi\|$ où c ne dépend pas de t. Or, d'après le Lemme 7.7, on a

$$\|(\tau_\xi \cdot D_t^3 - D_t^3)(1 + D_t^2)^{-1}\| \leqslant C\|\xi\|,$$

donc il suffit, d'après le Lemme 7.6, de trouver $\alpha > 0$ tel que

$$t(1 + D_t^2\hat{\otimes}1)[1 + (1\hat{\otimes}T + tD_t^3\hat{\otimes}1 + B_t(1 + t\Theta)\hat{\otimes}1)^2]^{-1/2+\alpha}$$

soit compact et de norme bornée par une constante ne dépendant que de α. La même méthode que celle employée pour la partie linéaire s'applique. □

9.2. CONSTRUCTION D'UN ÉLÉMENT $\gamma' \in KK_G(C(X), C(X))$

On suppose pour simplifier les notations que G est un groupe. Soit Θ vérifiant les hypothèses de la Proposition 8.4. On pose $F = f_0(D_1^3 + B_1(1 + \Theta))$. On note γ' la classe de $(\mathcal{H}_1, F)$ dans $KK_G(\mathbb{C}, \mathbb{C})$.

LEMME 9.2. $\gamma' = 1 \in KK_G(\mathbb{C}, \mathbb{C})$.

Démonstration. En considérant pour tout $s \in [0, 1]$ l'action $g \cdot \xi = \alpha_g(\xi) + sb(g)$, on se ramène par une homotopie à une action linéaire de G sur H.

Soit $\mathcal{H}'$ l'orthogonal de $\xi_{H,1}$ dans $\mathcal{H}_1$. Le vecteur $\xi_{H,1}$ est G-invariant et il engendre le noyau de $D_1^3 + B_1(1 + \Theta)$. Il s'agit donc de montrer que la classe de $(\mathcal{H}', D_1^3 + B_1(1 + \Theta))$ est nulle dans $KK_G(\mathbb{C}, \mathbb{C})$.

Pour tout $s \in [0, 1]$, soit F_s l'isométrie $(sD_1^3 + B_1(1+s\Theta))/|sD_1^3 + B_1(1+s\Theta)|$ agissant dans $\mathcal{H}'$. Pour montrer que $[(\mathcal{H}', F_1)] = 0 \in KK_G(\mathbb{C}, \mathbb{C})$, il suffit de montrer que $[(\mathcal{H}', F_0)] = 0$ et que $s \mapsto F_s$ est fortement continu.

Pour la première assertion, $F_0 = F_0^*$ est G-invariant et $F_0^2 = 1$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{H}')$ donc $(\mathcal{H}', F_0)$ est dégénéré.

Pour la deuxième assertion, prenons $f \in C_b(\mathbb{R})$ valant 1 sur $[1, +\infty[$ et -1 sur $]-\infty, -1]$. On a $F_s = f(sD_1^3 + B_1(1 + s\Theta))$, puisque le spectre de $(sD_1^3 +$

$B_1(1+\Theta))^2$ est inclus dans $[1,+\infty[$. L'ensemble des $\xi \in L^2(V, \Lambda^* V) \subset \mathcal{H}_1$, où $V \subset H$ est un sous-espace de dimension finie stable par Θ, et ξ appartenant à un sous-espace propre $\mathcal{H}''$ de D_1, engendrant $\mathcal{H}_1$, il suffit de montrer que pour un tel ξ l'application $s \mapsto F_s \xi$ est continue. Soit alors $F'_s = f_0(sD_1^3 + B_1(1+s\Theta))$. D'après la démonstration du Lemme 8.5, il suffit de prouver que $s \mapsto F'_{s|\mathcal{H}''}$ est normiquement continu.

Or, sur $\mathcal{H}''$, D_1 et $B_1(\Theta)$ sont bornés, donc $s \mapsto f_0(D_1 + s(D_1^3 + B_1(\Theta)))$ y est normiquement continu d'après le Lemme 8.3. □

9.3. L'ISOMORPHISME DE BAUM–CONNES

THÉORÈME 9.3. *Soit G un groupoïde localement compact (séparé) avec système de Haar agissant proprement sur un champ continu d'espaces affines Euclidiens. Alors G vérifie la conjecture de Baum–Connes avec coefficients, et G est (fortement) moyennable en K-théorie. En particulier, $C^*(G)$ est K-nucléaire et KK-équivalent à $C^*_r(G)$.*

Démonstration. Il suffit d'après le Théoréme 2.4 et la Proposition 4.12 de montrer $\eta \otimes_{\mathcal{A}(H)} D = 1 \in KK_G(C(X), C(X))$. On suppose pour simplifier les notations que G est un groupe. Soit $\tilde{\eta}$ comme dans 9.1. On a $\eta \otimes_{\mathcal{A}(H)} D = (h_0)_*^{-1}(\eta) \otimes_E [h_1] \otimes_S [ev_0]$, où $(h_0)_* \colon KK_G(\mathbb{C}, E) \to KK_G(\mathbb{C}, \mathcal{A}(H))$ est injective d'après la Proposition 5.6. Or, $(h_0)_*(\tilde{\eta}) = \eta$, donc

$$\eta \otimes_{\mathcal{A}(H)} D = \tilde{\eta} \otimes_E [h_1] \otimes_S [ev_0] = \gamma'$$

comme on le vérifie aisément. D'après le Lemme 9.2, on a $\gamma = 1$. □

COROLLAIRE 9.4. *Soit (V, F) un feuilletage dont le groupoïde d'holonomie est séparé et moyennable. Alors la conjecture de Baum–Connes est vérifiée pour (V, F).*

10. Application à la formule des coefficients universels

Rappelons [42] que l'on note $\mathcal{N}$ la plus petite catégorie de C^*-algèbres séparables nucléaires contenant les C^*-algèbres séparables de type I, et stable par équivalences de Morita, limites inductives, extensions et produits croisés par $\mathbb{R}$ et $\mathbb{Z}$. Alors toute C^*-algèbre $A \in \mathcal{N}$ vérifie la formule des coefficients universels (UCT) suivante:

$$0 \to \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(K_*(A), K_*(B)) \to KK_*(A, B) \to \mathrm{Hom}(K_*(A), K_*(B)) \to 0,$$

où les applications sont respectivement de degré 1 et de degré 0.

10.1. PRÉLIMINAIRES

Les C^*-algèbres de type I étant dans $\mathcal{N}$, nous avons besoin de quelques résultats préliminaires sur ce sujet.

LEMME 10.1. *Si Γ est un groupe compact agissant continûment sur un T_0-espace X, alors X/Γ est un T_0-espace.*

Démonstration. Sur X, on définit la relation: $x \leqslant y$ si tout voisinage de x contient y. C'est une relation d'ordre, car X est un T_0-espace.

Soit $F_{x,y} = \{\gamma \in \Gamma |\ x \leqslant y\gamma\}$. Supposons $\gamma \notin F_{x,y}$. Alors il existe un ouvert $U \ni x$ ne contenant pas $y\gamma$. Par continuité, il existe des ouverts $V \ni x$ et $W \ni e$ tels que $\forall x' \in V\ \forall\gamma' \in W\ x'\gamma' \in U$, d'où: si $\gamma' \in W$, $y(\gamma\gamma'^{-1}) \notin V$, ce qui prouve $\gamma\gamma'^{-1} \notin F_{x,y}$. Par conséquent, $F_{x,y}$ est un fermé de Γ.

Pour tout $x \in X$, $F_{x,x}$ est un sous-semi-groupe du groupe compact Γ. Comme pour tout $\gamma \in \Gamma$ la suite (γ^n) admet e pour valeur d'adhérence, on a, pour tout $\gamma \in F_{x,x}$: $x \leqslant x\gamma \leqslant x$, ce qui prouve que $F_{x,x}$ est le stabilisateur de x.

Soient maintenant x et y n'appartenant pas à la même orbite. Si $F_{x,y} \neq \emptyset$ et $F_{y,x} \neq \emptyset$, il existe γ et $\gamma' \in \Gamma$ tels que $x \leqslant y\gamma \leqslant x\gamma'$, donc $x = x\gamma'$ et par suite $x = y\gamma$: impossible. Donc on peut supposer par symètrie que $F_{x,y} = \emptyset$. En utilisant comme plus haut la continuité de l'action, un argument de compacité montre l'existence d'un ouvert $U \ni x$ ne rencontrant pas l'orbite de y. $\square$

LEMME 10.2. *Soit X un espace localement compact (séparé) et A une $C(X)$-algèbre (séparable). Alors A est de type I si et seulement si A_x est de type I pour tout x.*

Démonstration. Soit π un représentation factorielle de A. Pour tout $f \in C(X)$, $\pi(f) \in \pi(A)' \cap \pi(A)''$, donc $\pi(f)$ est scalaire. Par conséquent, il existe $x \in X$ tel que $\pi(f) = f(x)$ pour tout $f \in C(X)$, et π se factorise à travers A_x. $\square$

PROPOSITION 10.3. *Soit G un groupoïde propre avec système de Haar, A une G-algèbre telle que A_x soit de type I pour tout $x \in X = G^{(0)}$. Alors $A \circ G$ est de type I.*

Démonstration. $A \rtimes G$ étant une $C(X/G)$-algèbre, on se ramène d'après le Lemme 10.2 à un groupoïde transitif. Choisissons $x \in X$. Soient $\Gamma = G_x^x$, $Y = G^x$, $p\colon G^x \to X$ la restriction de l'application source, $B = p^*A$.

$\Gamma \ltimes B$ est Morita-équivalente à A: en effet, il existe un $C(X)$-module plein $\mathcal{E}$ tel que $C^*(\Gamma \ltimes Y) \simeq \mathcal{K}(\mathcal{E})$, et on a $\mathcal{K}(\mathcal{E} \otimes_{C(X)} A) \simeq C^*(\Gamma \ltimes Y) \otimes_{C(X)} A \simeq \Gamma \ltimes B$, donc, comme les identifications sont G-équivariantes, $A \rtimes G$ est Morita-équivalente à $\Gamma \ltimes (B \rtimes G)$.

Soit y l'élément neutre de Γ. On a $B \rtimes G \simeq B \rtimes (Y \times Y) \simeq B_y \otimes C^*(Y \times Y) \simeq B_y \otimes \mathcal{K}(L^2(Y, \lambda^x))$, ce qui prouve que $B \rtimes G$ est de type I. Comme Γ est compact, les Théorèmes 2.5 et 6.1 de [45] et le Lemme 10.1 montrent que $\Gamma \ltimes (B \rtimes G)$, et par suite $A \rtimes G$, sont de type I. $\square$

10.2. UCT POUR LES C^* ALGÈBRES DE GROUPOÏDE AGISSANT PROPREMENT SUR UN CHAMP CONTINU D'ESPACES AFFINES EUCLIDIENS

LEMME 10.4. *$S \in \mathcal{N}$, $K_0(S) = \mathbb{Z}^2$, $K_1(S) = 0$.*

Démonstration. S est une $C(\mathbb{R}_+)$-algèbre (en identifiant les fonctions paires sur $\mathbb{R}$ aux fonctions sur $\mathbb{R}_+$). La fibre en 0 est $\mathbb{C}$, celle en $t > 0$ est la première algèbre de Clifford $\mathcal{C}_1$ ($\mathcal{C}_1^{(0)} = \mathbb{C}$, $\mathcal{C}_1^{(1)} = \mathbb{C}\varepsilon$ avec $\varepsilon^2 = 1$). On a la suite exacte

$$0 \to C(]0, +\infty[)\hat{\otimes}\mathcal{C}_1 \to S \xrightarrow{\mathrm{ev}_0} \mathbb{C} \to 0,$$

où ev_0 est l'évaluation en 0, d'où $S \in \mathcal{N}$. Par ailleurs, la suite exacte à six termes montre que $K_0(S) = \mathbb{Z}^2$ et $K_1(S) = 0$. □

LEMME 10.5. *Soit Z un espace muni d'une action propre d'un groupoïde G localement compact avec système de Haar, et $H = (H_z)_{z \in Z}$ un champ continu G-équivariant d'espaces affines Euclidiens. Alors il existe une section globale continue G-équivariante de $(H_z)_{z\in Z}$, que l'on prendra comme origine. Considérant alors H_z comme un espace Euclidien, il existe $T \in \mathcal{L}(H)$ G-équivariant strictement positif tel que pour tout $f \in C(Z)$, $fT \in \mathcal{K}(H)$.*

Démonstration. On sait qu'il existe une section globale continue (non équivariante) de H. En utilisant une fonction 'cutoff', on peut 'moyenner' cette section, et ainsi la rendre G-équivariante. La deuxième assertion se démontre de même, puisqu'il existe un élément strictement positif de $\mathcal{K}(H)$ (non équivariant). □

LEMME 10.6. *Soit G un groupoïde localement compact avec système de Haar agissant proprement sur un champ continu H d'espaces affines Euclidiens. Alors la C^*-algèbre $\mathcal{A}(H) \rtimes G$ est dans $\mathcal{N}$.*

Démonstration. Soit $Z = H \times \mathbb{R}_+$ avec la topologie décrite dans la section 6. Comme $Z \to X$ est continue, on peut considérer l'image réciproque de H par $Z \to X$, qui est un champ continu au-dessus de Z.

Soit T comme dans le Lemme 10.5, $f_\epsilon(t) = 1$ pour $t > \epsilon$, $f_\epsilon(t) = 0$ pour $t \leqslant \epsilon/2$ et f_ϵ affine sur $[\epsilon/2, \epsilon]$. Soit $T_\epsilon = f_\epsilon(T)$. Alors T_ϵ est G-équivariant, et $\mathrm{Im}((T_\epsilon)_z)$ est de dimension finie pour tout $\xi \in H_z$. De plus, pour tout $\epsilon' > 0$, $z \in Z$ et $\xi \in H_z$, il existe $\epsilon > 0$, une section locale $z' \mapsto \xi_{z'}$ telle que $(T_\epsilon)_{z'}(\xi_{z'}) = \xi_{z'}$ et $\|\xi_z - \xi\| \leqslant \epsilon'$: en effet, comme $\cup_{\epsilon>0}\mathrm{Ker}(1 - T_\epsilon)_z$ est dense, il existe $\xi'_z \in H_z$ et $\epsilon > 0$ tels que $\|\xi'_z - \xi\| \leqslant \epsilon'$ et $T_{2\epsilon,z}(\xi'_z) = \xi'_z$. De plus, il existe une section locale $z' \mapsto \xi'_{z'}$ coïncidant avec ξ'_z en z, et il suffit de poser $\xi_{z'} = T_{2\epsilon}(\xi'_{z'})$.

Soit $\mathcal{A}(H)_\epsilon = \{a \in \mathcal{A}(H) |\ \forall z \in Z, a_z \in A(V_{\epsilon,z})\hat{\otimes}S\}$ où $V_{\epsilon,z} = \mathrm{Ker}(1 - T_{\epsilon,z})$. D'après les considérations qui précèdent, $\mathcal{A}(H)_\epsilon$ est une sous-algèbre $Z \rtimes G$-équivariante de $\mathcal{A}(H)$, et

$$\overline{\cup_{\epsilon>0}\mathcal{A}(H)_\epsilon} = \mathcal{A}(H).$$

Or, $\mathcal{A}(H)_\epsilon$ est une $Z \rtimes G$-algèbre, où $Z \rtimes G$ est un groupoïde propre, et pour tout $z \in Z$, la fibre au-dessus de z de cette algèbre est de dimension finie. Il résulte de la

Proposition 10.3 que $\mathcal{A}(H)_\epsilon \rtimes G$ est de type I. Par conséquent, $\mathcal{A}(H) \rtimes G$ est dans $\mathcal{N}$ (puisque limite inductive d'algèbres de type I). □

Venons-en au résultat principal sur la formule des coefficients universels:

PROPOSITION 10.7. *Soit G un groupoïde localement compact avec système de Haar. On suppose que G agit proprement sur un champ continu d'espaces affines Euclidiens. Alors $C^*(G)$ vérifie la formule des coefficients universels.*

Démonstration. On a vu que les hypothèses entraînent $j_G(\eta) \otimes_{\mathcal{A}(H)} j_G(D) = j_G(\gamma) = 1 \in KK(C^*(G), C^*(G))$, donc $C^*(G)$ est K-sous-équivalente à $\mathcal{A}(H) \rtimes G$. Or, cette dernière algèbre vérifie UCT d'après ce qui précède, d'où le résultat: en effet, on sait que si A est une C^*-algèbre, A vérifie UCT si et seulement si pour tout B, $K_*(B) = 0$ implique $KK_*(A, B) = 0$. □

10.3. APPLICATION À LA CLASSIFICATION

On ne sait pas si toute C^*-algèbre nucléaire vérifie la formule des coefficients universels. Cependant, nous avons vu que les C^*-algèbres de groupoïdes moyennables, dont on sait qu'elles sont nucléaires, la vérifient; or, la plupart des C^*-algèbres constructibles nucléaires que l'on connaît sont de la forme $C^*(G)$.

L'intérêt de cela est dans le théorème suivant [31, 4]:

THÉORÈME 10.8. *Soent A et B deux C^*-algèbres purement infinies simples unitales nucléaires ('pisun') vérifiant UCT.*

Si les invariants $(K_0(A), [1_A]_0, K_1(A))$ et $(K_0(B), [1_B]_0, K_1(B))$ sont isomorphes, alors A et B sont isomorphes.

EXEMPLE 10.9. Soit Γ un groupe hyperbolique au sens de Gromov et $X = \partial\Gamma$ sa frontière [20]. On sait que la C^*-algèbre $C^*(\partial\Gamma \rtimes \Gamma)$ est nucléaire [2], donc le groupoïde $\partial\Gamma \rtimes \Gamma$ est moyennable [2]. D'ailleurs il est possible de le démontrer directement (Appendice de [5]). Par conséquent, $C^*(\partial\Gamma \rtimes \Gamma)$ vérifie la formule des coefficients universels. Par ailleurs, comme elle est purement infinie simple [3, 34], elle entre dans la classification de Kirchberg [4, 31].

11. Appendice

Dans cet Appendice, nous faisons quelques remarques sur le classifiant des actions propres. Pour éviter d'aller trop loin dans des considérations topologiques, nous supposons les espaces localement compacts, σ-compacts séparés. De tels espaces sont alors paracompacts d'après [12].

THÉORÈME 11.1. *Soit X un espace localement compact (σ-compact séparé) muni d'une action propre d'un groupe discret Γ. Il y a équivalence entre:*

(i) *Pour tout sous-groupe fini Γ' de Γ, il existe un point $x \in X$ stable par Γ', et pour tout compact K Γ'-invariant de X, les deux projections $K \times K \to X$ sont Γ'-homotopes*;

(ii) *Pour tout espace localement compact (σ-compact séparé) Z muni d'une action propre de Γ, il existe une application Γ-équivariante de Z dans X, et cette application est unique à Γ-homotopie prés*;

(iii) *Comme en ii, mais en supposant de plus Z/Γ compact.*

Démonstration. Le fait que (ii) implique (iii) est clair. Supposons (iii). En prenant successivement $Z = \Gamma/\Gamma'$ et Z le saturé de $K \times K$ (dans $X \times X$), on obtient (i).

Supposons (i): On procède comme dans [9]. Pour tout $z \in Z$, soit Γ_z le stabilisateur de z. Alors c'est un sous-groupe fini de Γ, donc il existe un voisinage ouvert relativement compact Γ_z-invariant U_z de z. Comme Γ agit proprement sur Z, on peut, quitte à restreindre U_z, supposer que $gU_z \cap U_z = \emptyset$ pour tout $g \notin \Gamma_z$. Alors $U_z' = \Gamma U_z$ est un voisinage saturé de z, et il existe une application Γ-invariante de U_z' dans Γ/Γ_z. D'après la première condition de (i), il existe une application Γ-invariante continue de U_z' dans X. Considèrons alors $z_n \in Z$, U_n des ouverts relativement compacts Γ_{z_n}-invariants avec $z_n \subset U_n$, vérifiant $gU_n \cap U_n = \emptyset$ pour $g \notin \Gamma_{z_n}$, ΓU_n étant un recouvrement localement fini de Z. Soit V_n la réunion des ΓU_i pour $i < n$. On suppose construit $\psi_n \colon V_n \to X$ continue Γ-équivariante. Soit $\varphi_n \colon \Gamma U_n \to X$ une application Γ-équivariante, λ_n une application continue Γ-invariante de V_{n+1} dans $[0, 1]$ valant 0 sur $V_n \backslash \Gamma U_n$ et 1 sur $\Gamma U_n \backslash V_n$. Soit K l'adhérence de $\varphi_n(U_n \cap V_n) \cup \psi_n(U_n \cap V_n)$. C'est un compact Γ_{z_n}-invariant de X, donc on a une homotopie Γ_{z_n}-équivariante entre ψ_n et φ_n sur $U_n \cap V_n$, d'où une homotopie Γ-équivariante F entre ψ_n et φ_n sur $(\Gamma U_n) \cap V_n$. Il suffit de poser

$$\psi_{n+1}(x) = \begin{cases} F(\lambda_n(x), \psi_n(x), \varphi_n(x)) & \text{sur } \Gamma U_n \cap V_n \\ \psi_n(x) & \text{sur } V_n \backslash \Gamma U_n \\ \varphi_n(x) & \text{sur } \Gamma U_n \backslash V_n \end{cases}$$

et on prend $\psi(x) = \psi_n(x)$ pour n assez grand.

Pour l'unicité, on considére $U = X \times X \times ([0, 1/4[\cup]3/4, 1])$, f l'application de U dans X telle que $f(x, y, t) = x$ si $t < 1/4$ et $f(x, y, t) = y$ si $t > 3/4$. Alors on prolonge par la même méthode f en une application continue Γ-équivariante de $X \times X \times [0, 1]$ coïncidant avec f sur $X \times X \times \{0, 1\}$. □

Si les conditions du Théorème 11.1 sont réalisées, on dit que X est le classifiant des actions propres de Γ. Il est défini à Γ-équivalence d'homotopie près.

On remarque que X est le classifiant des actions propres si et seulement si pour tout sous-groupe fini Γ' de Γ et tout compact K Γ'-invariant de X, l'inclusion $K \to X$ est Γ'-contractile.

Plus généralement, on a:

THÉORÈME 11.2. *Soit X un espace localement compact (σ-compact séparé) muni d'une action propre d'un groupe de Lie G. Il y a équivalence entre:*

(i) *Pour tout sous-groupe compact H de G, il existe un point $x \in X$ stable par H, et pour tout compact H-invariant de X, les deux projections $K \times K \to X$ sont H-homotopes*;

(ii) *Pour tout espace localement compact (σ-compact séparé) Z muni d'une action propre de G, il existe une application G-équivariante de Z dans X, et cette application est unique à G-homotopie prés*;

(iii) *Comme en ii, mais en supposant de plus Z/G compact.*

Démonstration. La même démonstration s'applique, sauf que U_n n'est plus ouvert, mais son saturé l'est. Il existe un sous-groupe compact H_n et une application G-équivariante continue $\varphi_n\colon GU_n \to G/H_n$ vérifiant $\varphi_n^{-1}(H_n) = U_n$ [38]. □

Passons maintenant aux groupoïdes.

THÉORÈME 11.3. *Soit M un espace localement compact (σ-compact séparé) muni d'une action propre d'un groupoïde r-discret G. Il y a équivalence entre:*

(i) *Pour tout sous-groupoïde compact H de G, il existe une section continue H-invariante $H^{(0)} \to M$, et pour tout compact $K \subset M$ H-invariant, les deux projections $K \times_X K \to M$ sont H-homotopes*;

(ii) *Pour tout espace localement compact (σ-compact séparé) Z muni d'une action propre de G, il existe une application G-équivariante de Z dans M, et cette application est unique à G-homotopie prés*;

(iii) *Comme en ii, mais en supposant de plus Z/G compact.*

Démonstration. (ii) implique clairement (iii), et (iii) implique (i) car si H est un sous-groupoïde compact de G, G/H est localement compact séparé. Pour montrer que (i) implique (ii), on procède comme pour les groupes: il suffit de trouver localement des applications G-équivariantes de Z dans M, et de trouver des partitions de l'unité G-invariantes. Pour ce dernier point, il suffit de relever une partition de l'unité dans le quotient.

Notons $p\colon Z \to X$ l'application correspondant à l'action de G. Pour tout $x_0 \in X$ et z_0 tel que $p(z_0) = x_0$, montrons que l'on a une application G-équivariante d'un voisinage G-invariant de z_0 dans M. On considère le stabilisateur $\Gamma \subset G_{x_0}^{x_0}$ de z_0. Γ est fini, et ses éléments peuvent être considérés comme des homéomorphismes locaux de Z. Plus précisément, il existe un voisinage V de x_0, des applications continues $g_\gamma\colon V \to G$ ($\gamma \in \Gamma$) avec pour tout $\gamma \in \Gamma$, $g_\gamma(x_0) = \gamma$, $g_\gamma(x)$ distincts si $x \in V$, $g_\gamma(x) \in G_x$. On peut supposer que pour tout γ, il existe γ' tel que $g_\gamma(x)^{-1} = g_{\gamma'}(r(g_\gamma(x)))$ $\forall x \in V$. Alors pour $\gamma \in \Gamma$ et z assez proche de z_0, on pose $\alpha(\gamma)z = g_\gamma(p(z))z$.

Soit alors U un voisinage relativement compact Γ-invariant de z_0. Quitte à le restreindre, on peut supposer que pour tout $z \in U \cap p^{-1}(x_0)$ et $\gamma \in G_{x_0}^{x_0} \setminus \Gamma$, $\gamma z \notin U$.

Posons $K = \overline{\{g \in G | \ U \cap gU \neq \emptyset\}}$. Il est compact. On le recouvre par une réunion finie d'ouverts $U_g \ni g$ de G tels que les applications source et but induisent des homéomorphismes de U_g sur $s(U_g)$ et $r(U_g)$ respectivement, et tels que si $g \notin G_{x_0}^{x_0}$, $x_0 \notin r(U_g)$ ou $x_0 \notin s(U_g)$. Quitte à diminuer U, on peut supposer que K est recouvert par des U_g pour $g \in \Gamma$. Par conséquent, pour tout g vérifiant $U \cap gU \neq \emptyset$ et tout $z \in p^{-1}(s(g)) \cap U$, on a

$$gz = g_\gamma(p(z))z = \alpha(\gamma)z \in U$$

pour un certain $\gamma \in \Gamma$, donc K est un sous-groupoïde compact de G. Soit a une section K-invariante de $M \to X$, alors la composée

$$U \xrightarrow{p} X \xrightarrow{a} M$$

donne une application K-équivariante de U dans M. $\square$

Pour tout G-espace Z, notons $M(Z)$ l'espace des mesures sur Z, positives de masse dans $]1/2, 1]$, dont le support est inclus dans l'un des $Z_x = p^{-1}(x)$.

On sait, d'après la construction de Milnor que le classifiant des actions propres existe toujours [9]. On peut aussi remarquer que:

PROPOSITION 11.4 [33, 46]. *Pour tout G-espace propre Z tel que l'application source $Z \to X$ est ouverte, $M(Z)$ est le classifiant des actions propres de G.*

Démonstration. Rappelons simplement comment on peut construire, pour tout G-espace propre Z', une application G-équivariante continue $\mu\colon Z' \to M(Z)$.

Soit c une fonction 'cutoff' pour Z': pour tout $z \in Z'$, on a

$$\int_{G^{s(z)}} c(zg)\, \lambda^{s(z)}(\mathrm{d}g) = 1.$$

Soit $\nu\colon X \to M(Z)$ une section continue. Il en existe une d'après le Théorème 3.3 ($1 \Rightarrow 3$) et la Proposition 3.14 de [11]. On pose alors

$$\mu(z')(f) = \int_{g \in G^{s(z')}} \lambda^{s(z')}(\mathrm{d}g)\, c(z'g) \int_{z \in Z_{s(g)}} f(zg^{-1})\, \mathrm{d}\nu_{s(g)}(z). \qquad \square$$

Remarque 11.5. Soit Z comme dans la Proposition 11.4. Soit Y_n une suite exhaustive de parties G-compactes de Z, M_n l'ensemble des mesures appartenant à $M(Z)$, de masse 1, dont le support est inclus dans l'un des translatés de Y_n. Alors le télescope M' des M_n, c'est-à-dire $\cup_{n \in \mathbb{N}} M_n \times [n, n+1]$, est le classifiant des actions propres de G.

Démonstration. Esquissons simplement la démonstration. Soit Z' un G-espace propre. Pour démontrer l'unicité à G-homotopie près d'une application

G-équivariante $Z' \to M'$, il suffit de prouver que les deux projections $M' \times_X M' \to M'$ sont G-homotopes, ce qui est aisé.

Pour montrer l'existence, il suffit, au moyen d'une partition de l'unité G-équivariante, de le faire localement. Or, la formule donnée dans la démonstration de la Proposition 11.4, si le support des $\nu_{s(g)} \cdot g^{-1}$ reste dans un compact fixé. Mais cette condition est facile à réaliser, puisque pour tout ouvert relativement compact $U \subset Z$, la restriction de $s\colon Z \to X$ à U est ouverte, donc on peut lui appliquer le Théorème 3.3 de [11]. □

Remerciements

L'auteur de ces lignes tient tout particulièrement à remercier G. Skandalis, à qui certaines idées apparaissant ici sont dues; P. Julg pour avoir remarqué une erreur dans une version précédente de cet article; G. Kasparov pour avoir exposé les idées de [24].

References

1. Adams, S.: Boundary amenability for word hyperbolic groups and an application to smooth dynamics of simple groups, *Topology* **33**(4) (1994), 765–783.
2. Anantharaman-Delaroche, C.: Systèmes dynamiques non commutatifs et moyennabilité, *Math. Ann.* **279** (1987), 297–315.
3. Anantharaman-Delaroche, C.: Purely infinite C^*-algebras arising from dynamical systems, *Bull. Soc. Math. France* **125**(2) (1997), 199–225.
4. Anantharaman-Delaroche, C.: Classification des C^*-algèbres purement infinies nucléaires, *Séminaire Bourbaki*, Exposé 805, 1995.
5. Anantharaman-Delaroche, C. et Renault, J.: Amenable groupoids, preprint.
6. Arveson, W.: Notes on extensions of C^*-algebras, *Duke Math. J.* **44**(2) (1977).
7. Baaj, S.: Thèse de troisième cycle, *Paris VI*, 1981.
8. Baaj, S. et Julg, P.: Théorie bivariante de Kasparov et opérateurs non bornés dans les C^*-modules Hilbertiens, *C.R. Acad. Sci. Paris* **296** (1983), 875–878.
9. Baum, P., Connes, A. et Higson, N.: Classifying space for proper actions and K-theory of group C^*-algebras, *Contemp. Math.* **167** (1994), 241–291.
10. Bekka, M.E., Cherix, P.-A. et Valette, A.: Proper affine isometric actions of amenable groups, *Novikov Conjectures, Index Theorems and Rigidity*, Vol. 2, London Math. Soc. Lecture Notes Ser. 227, Cambridge Univ. Press, 1993, pp. 1–4.
11. Blanchard, E.: Déformations de C^*-algèbres de Hopf. *Bull. Soc. Math. France* **124**(1) (1996), 141–215.
12. Bourbaki, N.: *Topologie générale*, Hermann, Paris, 1960.
13. Baaj, S. et Skandalis, G.: C^*-algèbres de Hopf et théorie de Kasparov équivariante, *K-Theory* **2** (1989), 683–721.
14. Connes, A. et Higson, N.: Déformations, morphismes asymptotiques et K-théorie bivariante, *C.R. Acad. Sci. Paris Série I* **311** (1990), 101–106.
15. Connes, A., Feldman, J. et Weiss, B.: Amenable equivalence relations are generated by a single transformation, *Ergodic Theory Dynam. Systems* **1** (1981), 431–450.
16. Connes, A.: An analogue of the Thom isomorphism for crossed products of a C^*-algebra by an action of $\mathbb{R}$. *Adv. Math.* **39**(1) (1981), 31–55.

17. Cuntz, J.: K-theoretic amenability for discrete groups, *J. reine angew. Math.* **344** (1983), 180–195.
18. Dixmier, J.: *C^*-algebras*, North-Holland, Amsterdam, 1982.
19. Fox, L. et Haskell, P.: K-amenability for $\mathrm{SU}(n, 1)$. *J. Funct. Anal.* **117**(2) (1993), 274–307.
20. Ghys, E. et de la Harpe, P.: *Sur les groupes hyperboliques d'après Mikhael Gromov*, Birkhäuser, Basel, 1990.
21. Guentner, E., Higson, N. et Trout, J.: Equivariant E-theory, 1997, Preprint.
22. Godbillon, G.: *Feuilletages, études géométriques*, *Progr. Math.* 98, Birkhäuser , Boston, 1991.
23. Haefliger, A.: Groupoïde d'holonomie et classifiant, *Astérisque* **116** (1984), 70–97.
24. Higson, N., et Kasparov, G. G.: Operator K-theory for groups which act properly and isometrically on Hilbert space, *Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc.* **3** (1997), 131–142 (electronic).
25. Hilsum, M. et Skandalis, G.: Morphismes K-orientés d'espaces de feuilles et fonctorialité en théorie de Kasparov, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4)* **20** (1987), 325–390.
26. Harpe, P. de la et Valette, A.: La propriété (T) de Kazhdan pour les groupes localement compacts, *Astérisque* **175**, Soc. Math. de France, Paris (1989).
27. Julg, P. et Kasparov, G.: Operator K-theory for the group $\mathrm{SU}(n, 1)$, *J. reine angew. Math.* **463** (1995), 99–152.
28. Julg, P. et Valette, A.: K-theoretic amenability for $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_p)$ and the action on the associated tree, *J. Funct. Anal.* **58** (1984), 194–215.
29. Kasparov, G.: Lorentz groups: K-theory of unitary representations and crossed products. *Soviet Math. Dokl.* **29**(2) (1984), 256–260.
30. Kasparov, G.: Equivariant *KK*-theory and the Novikov conjecture, *Invent. Math.* **91** (1988), 147–201.
31. Kirchberg, E.: The classification of purely infinite C^*-algebras using Kasparov's theory, *version préliminaire*, Humboldt Universität zu Berlin, 1994.
32. Kasparov, G. et Skandalis, G.: Groups acting on buildings, operator K-theory and Novikov's conjecture, *K-Theory* **4** (1991), 303–337.
33. Kasparov, G. et Skandalis, G.: Groupes 'boliques' et Conjecture de Novikov, *C.R. Acad. Sci. Paris Série I*, **319** (1994), 815–820.
34. Laca, M. et Spielberg, J.: Purely infinite C^*-algebras from boundary actions of discrete groups. *J. reine angew. Math.* **480** (1996), 125–139.
35. Le Gall, P. Y.: Théorie de Kasparov équivariante et groupoïdes, Thèse de doctorat, Université de Paris VII, 1994.
36. Le Gall, P. Y.: Théorie de Kasparov équivariante et groupoïdes. *C.R. Acad. Sci. Paris Série. I Math.* **324**(6) (1997), 695–698.
37. Maghfoul, M.: Théorie de Kasparov équivariante et suites exactes, Thèse de doctorat, Université de Paris VII, 1995; à paraître dans *K-Theory* sous le titre 'Semi-exactitude du bifoncteur de Kasparov équivariant'.
38. Palais, R.: On the existence of slices for actions of non-compact Lie groups, *Ann. Math.* **73**(2) (1961), 295–323.
39. Renault, J.: *A Groupoid Approach to C^*-Algebras*, Lecture Notes in Math. 793, Springer, Berlin, 1980.
40. Renault, J.: Représentation des produits croisés d'algèbres de groupoïdes, *J. Operator Theory* **18** (1987), 67–97.
41. Reyssat, E.: *Quelques aspects des surfaces de Riemann*, Progr. Math., Birkhäuser, Basel, 1989.
42. Rosenberg, J. et Schochet, C.: The Künneth theorem and the universal coefficient theorem for Kasparov's generalized K-functor, *Duke Math. J.* **55** (1987), 431–474.
43. Schochet, C.: Topological methods for C^*-algebras: III. Axiomatic homology, *Pacific J. Math.* **114** (1984), 399–445.

44. Skandalis, G.: Une notion de nucléarité en K-théorie (d'après J. Cuntz), *K-Theory* **1** (1988), 549–573.
45. Takesaki, M.: Covariant representations of C^*-algebras and their locally compact automorphism groups, *Acta Math.* **119** (1967), 273–303.
46. Tu, J. L.: La conjecture de Novikov pour les feuilletages hyperboliques, *K-Theory* **16** (1999), 129–184.
47. Tu, J. L.: The Baum–Connes conjecture and discrete group actions on trees, à paraître dans *K-Theory* **17**(4) (1999).
48. Zimmer, R.: *Ergodic Theory and Semisimple Groups*, Birkhäuser, Basel.