

# Stabilisierte Finite Elemente in der Hydrodynamik

Dr.-Ing. habil. Peter Milbradt,  
Institut für Bauinformatik, Universität Hannover

## Zusammenfassung

Im Beitrag wird ein holistischer Modellansatz zur Lösung gekoppelter hydro- und morphodynamischer Prozesse in Binnengewässern und im Küstennahbereich auf der Basis stabilisierter Finite Elemente vorgestellt. Aufbauend auf den dreidimensionalen Navier-Stokes-Gleichungen lässt sich ein Differentialgleichungssystem entwickeln, welches Seegang, Strömung und Sedimenttransport beschreibt. Dem Transportcharakter dieses Systems entsprechend wird ein stabilisiertes Verfahren auf Dreiecken vorgestellt. Das Modell wurde für Seegangs- und Strömungs-Untersuchungen im Jade-Weser-Ästuar an der deutschen Nordseeküste eingesetzt.

## Einleitung

Hydro- und morphodynamische Prozesse in Binnengewässern und im Küstennahbereich erzeugen hochkomplexe Phänomene. Zur Beurteilung der Entwicklung von Küstenzonen, von Flussläufen sowie von Eingriffen des Menschen in Form von Schutzbauwerken, sind geeignete Modellwerkzeuge notwendig. Dies führt zu wachsenden Anforderungen an numerische Modelle im wasserbaulichen Ingenieurwesen [2].

Die Dynamik des Wasserkörpers lässt sich durch die dreidimensionalen Navier-Stokes-Gleichungen beschreiben. Sollen alle interessierenden physikalischen Phänomene durch ein entsprechendes numerisches Simulationsmodell aufgelöst werden, so würde dies eine hohe räumliche und zeitliche Diskretisierung erforderlich machen. Um trotzdem eine Umsetzung in numerischen Simulationsmodellen zu ermöglichen werden unterschiedliche Näherungen verwendet. Ein wesentliches Konzept hierbei ist, in Anlehnung an die Reynolds-Zerlegung der Strömung, eine Zerlegung der Hydrodynamik des Wasserkörpers in drei Anteile: großräumige Strömung, Seegang und turbulente Strömung. Jeder dieser Teilprozesse kann wiederum durch eine Vielzahl von unterschiedlichen Modellvorstellungen beschrieben werden. Weitere Modellkomponenten beschreiben die Veränderung der Salzkonzentration, der Temperatur und anderen im Wasser befindlichen Inhaltsstoffen. In Analogie zur Hydrodynamik lassen sich morphologische Veränderungen über Erhaltungs- und Transportmodelle beschrieben. Die Formulierung dieser physikalischen Modellapproximationen führt im Allgemeinen zu Systemen zeitabhängiger partieller Differentialgleichungen. In der Vergangenheit wurden für die beschriebenen Teilmodelle effiziente, dem Problem angepasste numerische Simulationsmodelle entwickelt und eingesetzt.

Die Simulation der Interaktion dieser verschiedenen Prozesse, wie Seegang, Strömung und Sedimenttransport erfolgte in der Vergangenheit durch die externe Kopplung bestehender Teilmodelle. Diese iterative Kopplung von Modellen erfordert ein hohes Maß an Erfahrung des Modellierers in Hinsicht auf die Kopplungszeitschritte und führt häufig zu einer unzureichenden Wiedergabe der Wechselwirkungen.

## Modellansatz

Das hier vorgestellte Modell basiert auf einer einheitlichen Modellbeschreibung der hydro- und morphodynamischen Modellkomponenten in Form eines geschlossenen Differentialgleichungssystems [2].

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial K_i}{\partial t} &= -\frac{\partial \sigma_a}{\partial x_i} + C_g \frac{K_j}{k} \left( \frac{\partial K_j}{\partial x_i} - \frac{\partial K_i}{\partial x_j} \right) \\
 \frac{\partial \sigma}{\partial t} &= -\left( U_i + C_{g_i} \right) \frac{\partial \sigma}{\partial x_i} - k_{x_i} \frac{\partial u_i}{\partial t} + f \cdot \frac{\partial h}{\partial t} \\
 \frac{\partial a}{\partial t} &= -\frac{1}{2a} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( U_i + C_{E_i} \right) a^2 - \frac{S_{ij}}{\rho g a} \frac{\partial U_i}{\partial x_i} + \frac{U_i (T_i - T_i^B)}{\rho g a} + \frac{\epsilon_B}{\rho g a} \\
 \frac{\partial U_i}{\partial t} &= -U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - g \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial x_i} - \frac{1}{\rho d} \frac{\partial S_{ij}}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho d} (T_i - T_i^B) \\
 \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial t} &= -\frac{\partial U_j d}{\partial x_j} \\
 \frac{\partial C}{\partial t} &= -U_i \frac{\partial C}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \tau_i \frac{\partial C}{\partial x_i} \right) + S \\
 q_i &= \int_{-h}^n U_i C dz + q_{b_i} \\
 \frac{\partial h}{\partial t} &= -\frac{1}{1-n} \frac{\partial q_i}{\partial x_i}
 \end{aligned} \tag{1}$$

Hierbei beschreiben die ersten drei Gleichungen die Entwicklung der mittleren Seegangparameter (Wellenamplitude  $a$ , Kreisfrequenz  $\sigma$  und Wellenzahlvektor  $\vec{K}$ ), die mittleren Gleichungen beschreiben die großräumigen Strömungsverhältnisse infolge der Tide (mittlere Wasserspiegelauslenkung  $\bar{\eta}$ , Geschwindigkeitsvektor  $\vec{U}$ ) und die letzten drei Gleichungen morphodynamische Veränderungen (gelöste Sedimentkonzentration  $C$ , Bodenfracht  $q$  und Meeresboden  $h$ ). Die Interaktion zwischen Seegang und Strömung wird im wesentlichen über das Konzept der Radiation Stresses [3] realisiert. Die Bestimmung der morphologischen Veränderungen erfolgt über Seegangs- und Strömungsabhängige Quell- und Senkterme  $S$  sowie über empirische Transportformeln für die Bodenfracht.

Es liegt nun nahe, dieses System zeitabhängiger partieller Differentialgleichungen direkt zu lösen. Die zu simulierenden physikalischen Prozesse sind dann auch numerisch direkt gekoppelt und können mit einheitlichen Methoden gelöst werden.

Führt man für die Teilprozesse (Seegang -  $W$ , Strömung -  $U$  und Sedimenttransport -  $S$ ) folgende Differentialoperatoren:

$$L_v \equiv A_{vi} \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left( K_{vij} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \tag{2}$$

ein, so kann das Gleichungssystem (1) in der Form

$$\begin{aligned}
\frac{\partial W}{\partial t} + L_W W + Q_W &= 0 \\
\frac{\partial U}{\partial t} + L_U U + Q_U &= 0 \\
\frac{\partial S}{\partial t} + L_S S + Q_S &= 0
\end{aligned} \tag{3}$$

geschrieben werden. Im Allgemeinen hängen sowohl die Differentialoperatoren  $L_i$  als auch die Quell- und Senkterme  $Q_i$  von allen Unbekannten des Systems ab.

Auf der Grundlage einer solchen Blockdarstellung lässt sich eine angepasste stabilisierte Finite Element Approximation realisieren.

### Stabilisierte Finite Elemente Approximation

Der Großteil der Modellgleichungen der Hydro- und Morphodynamik sind Transportgleichungen. Die verwendeten numerischen Verfahren müssen diesem Charakter der Gleichungen Rechnung tragen. In vielen Anwendungen hat sich gezeigt, dass klassische Finite Differenzen und Finite Elemente Verfahren bei der Lösung von Transportgleichungen zu Instabilitäten neigen. Seit Huges und Brooks [1] für die skalare eindimensionale Transportgleichung eine parameterabhängige Stabilisierung vorgeschlagen haben, sind verschiedene stabilisierende Verfahren für Transportgleichungen entwickelt worden. Im Folgenden wird ausgehend von den Modellgleichungen der Hydrodynamik das semi-diskrete streamline upwinding Petrov-Galerkin (SUPG) Verfahren dargestellt und besonders auf die geeignete Wahl der Stabilisierungsparameter eingegangen.

### Semi-diskrete SUPG

Sei  $\Omega$  dein offenes beschränktes Gebiet im  $\mathbb{R}^n$  und  $\Gamma$  sein Rand. Gesucht ist eine zeitabhängige vektorwertige Funktion  $U: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ , die der Gleichung

$$\frac{\partial U}{\partial t} + L U + Q = 0 \tag{4}$$

genügt. Hierbei sei  $L$  ein quasi-linearer Differentialoperator und  $Q$  wird als Quell- und Senkterm bezeichnet. Es wird davon ausgegangen, dass alle notwendigen Anfangswerte und Randbedingungen, die die Existenz der Lösung sicherstellen, gegeben sind. Der quasi-lineare Operator habe folgende Form:

$$L \equiv A_i \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} (K_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j}) \tag{5}$$

Hierbei ist  $A_i$  die  $i$ -te Transportmatrix und  $K_{ij}$  sind die Diffusionsmatrizen. Folglich kann der Operator  $L$  als Summe eines Transportoperators  $L_{adv}$  und eines Diffusionsoperators  $L_{diff}$  aufgefasst werden:

$$L = L_{adv} + L_{diff} \tag{6}$$

Jeder Operator kann weiterhin in seine lokalen Komponenten zerlegt werden. So hat beispielsweise der Transportoperator die Form:

$$L_{adv} = \sum L_{adv_i} = \sum A_i \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{7}$$

Zur Approximation der Lösung der Gleichung (1) bzw. (4) mit der Methode der Finiten Elemente wird das Gebiet  $\Omega$  in  $n_{el}$  Finite Elemente  $\Omega_e$  diskretisiert. Auf der Basis dieser Zerlegung werden Ansatzfunktionen  $\Phi_i$  definiert, mit denen die unbekannte Lösung

$U \simeq \tilde{U} = \sum \Phi U^i$  approximiert wird. Hierbei können die  $U^i$  als die Knotenwerte der approximierten Funktion  $\tilde{U}$  aufgefasst werden.

Die Herleitung der semi-diskreten stabilisierten Finiten Element Approximation erfolgt über die Kombination eines standard Galerkin Verfahrens und einer kleinsten Quadrate Approximation:

$$\int_{\Omega} \Phi_l \left( [\Phi_l]^T \left[ \frac{\partial U^i}{\partial t} \right] + L([\Phi_l]^T [U^i]) + Q \right) d\Omega + \sum_k \tau_k \int_{\Omega_k} L^T(\Phi_l) \left( [\Phi_l]^T \left[ \frac{\partial U^i}{\partial t} \right] + L([\Phi_l]^T [U^i]) + Q \right) d\Omega_k = 0 \quad (8)$$

Das erste Integral beinhaltet die Galerkin Approximation und in der zweiten Zeile stehen die Terme der kleinsten Quadrate Stabilisierung, bestehend aus einer Summe von Integralen über das Innerer der Elemente. Diese Approximation wird semi-diskrete Galerkin-kleinste-Quadrate-Approximation (GLS) genannt. In vielen Bereichen der Hydrodynamik wird das obige Verfahren dahingehend modifiziert, dass nicht der gesamte Operator zur Stabilisierung verwendet wird, sondern nur der advective Anteil. Das so entstandene Verfahren wird auch semi-diskretes streamline upwinding Petrov-Galerkin-Verfahren (SUPG) genannt. Die in der zweiten Zeile herangezogene Zeitableitung der Unbekannten  $U$  kann durch die Galerkin-Approximation der ersten Zeile bestimmt werden. Das so entstandene Verfahren kann als ein Prädiktor-Korrektor-Verfahren für die Ortsapproximation aufgefasst werden.

Es ist bekannt, dass der so genannte upwinding-Koeffizient  $\tau$  einen wesentlichen Einfluss auf die Qualität der Approximation hat. In Anlehnung an die Bestimmung des upwinding-Koeffizienten  $\tau$  im eindimensionalen skalaren Fall, wird hier folgende Vorschrift, basierend auf den Spektralradien der quasilineareren Differentialoperatoren verwendet.

$$\tau := \frac{\alpha_{opt} \cdot h_e}{2 \cdot \|L_{adv}\|} \quad (9)$$

In Anlehnung an die Definition des Betrages einer Zahl bzw. eines Vektors wird der Betrag des quasilineareren Differentialoperators wie folgt bestimmt:

$$\|L_{adv}\| := \sqrt{\sum \rho(A_i)^2} \quad (10)$$

wobei  $\rho(A_i)$  die Spektralradien der Operatorkomponenten sind.

$$\rho(A_i) := \max |\lambda_j(A_i)| \quad (11)$$

Der Parameter  $\alpha_{opt}$  wird in Analogie zum eindimensionalen Fall elementweise berechnet

$$\alpha_{opt} := \coth(Pe) - \frac{1}{Pe} \quad (12)$$

mit der Element-Peclet-Zahl

$$Pe := \frac{\|L_{adv}\| \cdot h_e}{\|L_{diff}\|} \quad (13)$$

wobei  $h_e$  ein Maß für die Elementausdehnung ist. Die Berechnung der Elementausdehnung erfolgt unter Berücksichtigung der Transportrichtung wie in Abb. 1 dargestellt.

Die Festlegung der Elementausdehnung als auch der Beträge der Differentialoperatoren bilden auch die Grundlage für die Bestimmung des zu verwendenden Courant-Schrittes.

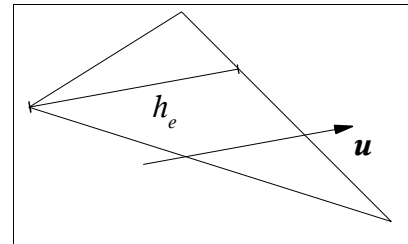


Abbildung 1: Bestimmung der Elementausdehnung

## Seegangs-Tide-Interaktion im Jade-Weser-Ästuar

Mit der Planung und dem Ausbau des Container-Terminals Bremerhaven und des Jade-Ports werden vertiefte Kenntnisse über die hydro- und morphodynamischen Verhältnisse im Jade-Weser-Ästuar erforderlich. Die Hydrodynamik von Ästuarsystemen ist gekennzeichnet durch eine starke Interaktion zwischen dem aus der offenen See einlaufenden

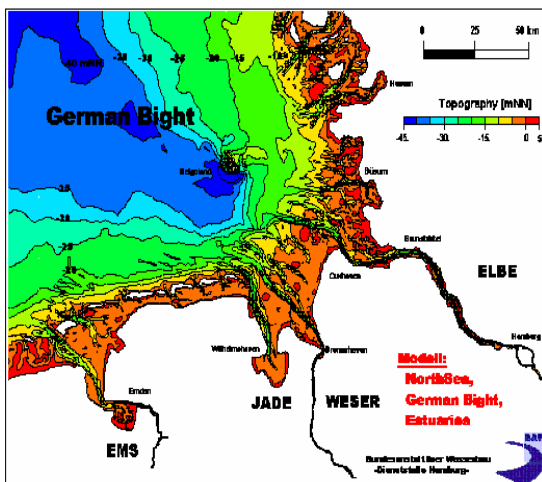


Abbildung 2: Ästuar der deutschen Nordseeküste

für Seegang, Tide und Morphodynamik durchgeführt. Als Modellzeitraum wurde ein Sturmereignis vom 21.10.2002 bis 31.10.2002 herangezogen. Das Modell wurde am seeseitigen Modellrand über Hindcastdaten des Bundesamtes für Seeschifffahrt und Hydrographie (BSH) für Tideströmung, Wasserspiegelauslenkung und Seegang gesteuert. Als im Modell zu berücksichtigende Windfelder wurden Hincastdaten des Deutschen Wetterdienstes (DWD) verwendet.

Die Abb.: 3 gibt einen Überblick über das gewählte Untersuchungsgebiet und zeigt charakteristische Seegangparameter bei einer nordwestlichen Windlagen. Um den Einfluss der Tide auf den Seegang und umgekehrt zu verdeutlichen wurde für diese Darstellung davon ausgegangen, dass ein Wetterlage vorliegt mit konstantem Wind aus nordwestlicher Richtung über eine gesamte Tide. Durch die seewärtig strömenden Wassermassen bei Ebbe verlieren die Wellen wesentlich schneller an Energie als im Flutfall, bei dem die in das Ästuar einlaufende Tideströmung die Wellen wesentlich weiter in das Ästuar transportieren. Im Sturmfall wird dieses Phänomen durch stark erhöhte Wasserstände noch verstärkt.

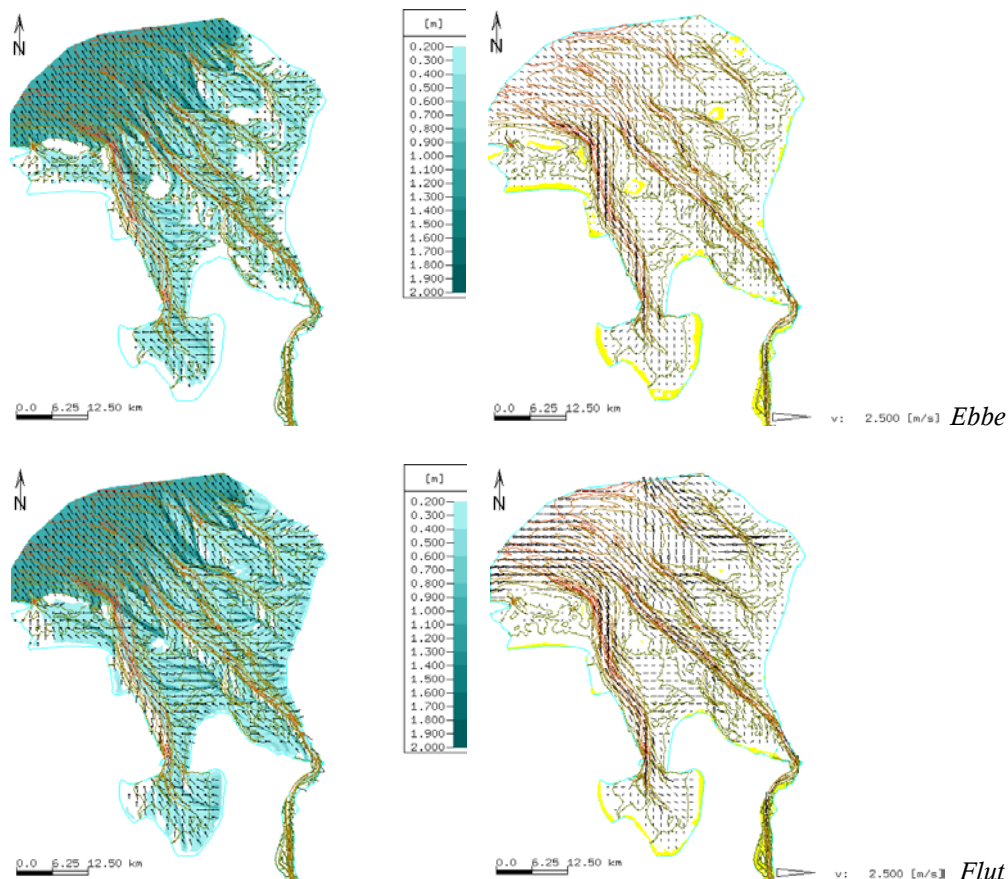


Abbildung 3: Seegangverteilung und Strömungsmuster bei Ebbe und Flut im Jade-Weser-Ästuar (Wasserstand um NN, Seegang  $[H=1m, T=4s]$  und Wind der aus  $320^\circ$  der Stärke  $7m/s$  erzeugt)

Auf der anderen Seite führt der Energieverlust der Wellen, im wesentlichen durch das Brechen der Wellen in flachen Bereichen, zur Erzeugung von seegangsinduzierten großräumigen (häufig küstennahen) Strömungen. Diese verändern ihrerseits die Tideströmung und können bei Sedimenten zu anderen Transportwegen führen.

Bei der Untersuchung der berechneten morphologischen Veränderungen mit und ohne Seegangseinwirkung lassen solche Unterschiede erkennen und müssen weiter untersucht werden.

Bedanken möchte ich mich bei der Bundesanstalt für Wasserbau Hamburg, namentlich bei Dr.-Ing. Andreas Plüß für seine Unterstützung und die anregenden Diskussionen sowie beim Bundesamt für Schifffahrt und Hydrographie und dem Deutschen Wetter Dienst für die zur Verfügung gestellten Hindcast-Daten.

#### References

- [1] A. N. Brooks and T. J. R. Hughes. Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 32:199-259, 1982.
- [2] Lehfeldt, R., Milbradt, P., Zyserman, J.A., Barthel, V. (2002), Evaluation of simulation models used for morphodynamic studies, *ICCE2002*
- [3] Lounquet-Higgins, M.S. and Stewart, R:W, 1960, Changes in form of short gravity waves on long waves and tidal currents, *J. Fluid Mechanics*, Vol. 8, pp. 565-583

- [4] Mai, S., Daemrich, K.F. und Zimmermann, C., JadePort: Seegangsbedingungen und Wellenüberlauf, HANSA 137, S.76-77
- [5] Plüß, A. Das Nordseemodell der BAW zur Simulation der Deutschen Bucht, in: Die Küste (2002/2003).