Produits de Massey et déformations d'après O.A. Laudal

D. Schaub
Département de Mathématiques
Université d'Angers
49045 ANGERS Cedex.

Ces notes sont le résumé de quelques exposés que j'ai faits en 1994 au séminaire de géométrie algébrique d'Angers dont le sujet est l'article de O.A. Laudal, *Matric Massey products and formal moduli I* (voir [1]). Le but initial était de parler d'espaces de modules de fibrés sur une courbe, d'où l'idée, suivant une suggestion de Laudal, de regarder les déformations de certains faisceaux de modules particuliers.

En réalité, ce qui est relaté ici, c'est le calcul du module formel d'un A-module E où A est une k-algèbre sur un corps k. Dans le cas d'une courbe projective, il est possible aussi de faire une théorie analogue et de relier "local" et "global" (voir à ce sujet [5]).

Ce qui n'apparait pas immédiatement dans l'article de Laudal, c'est que les produits de Massey peuvent être définis sur une algèbre différentielle graduée et donc indépendemment (a priori) de questions de déformations. En fait, pour justifier l'existence de tels produits, il faut utiliser des résultats de [2] et du paragraphe 2 : ce sont les différents lemmes de la dernière partie.

1 Introduction.

On considère un A-module E où A est une k-algèbre et on se propose de calculer une enveloppe du foncteur de déformation à savoir :

Soit $\underline{l} = \{k\text{-algèbre locale artinienne }\}$ et soit

$$Def_E : \underline{l} \to \underline{\mathcal{E}ns}$$

le foncteur qui à $(S \to k)$ associe

$$\{E_S \;\; A \otimes_k S\text{module, plat sur } S \text{ et tq. } E_S \otimes_S k = E\} / \cong .$$

Une enveloppe $H^\wedge$ pour Def_E c'est une k-algèbre complète tq. il existe une surjection : $\rho : Mor_*(H^\wedge, \cdot) \to Def_E$ vérifiant :

1. ρ est lisse;
2. $\rho(k[\epsilon]) : Mor_*(H^\wedge, k[\epsilon]) \; (= m_H/m_H^2) \simeq Def_E(k[\epsilon])$.

Bien entendu, m_H/m_H^2 est l'espace tangent de Zariski $T_{\underline{H}^\wedge,*}$.

Remarque : Un morphisme de foncteur $\rho : F \to G$ est *lisse* si, pour toute surjection $R \to S$ dans $\underline{l}$, le morphisme

$$F(R) \longrightarrow F(S) \times_{G(S)} G(R)$$

est surjectif.

Ici cela se traduit par :

$$\begin{array}{ccc} Mor(H^\wedge, R) & \longrightarrow & Def_E(R) \\ \downarrow & & \downarrow \\ Mor(H^\wedge, S) & \longrightarrow & Def_E(S) \end{array}$$

pour chaque $\phi \in Mor(H^\wedge, S)$, $\xi \in Def_E(R)$ tels que *phi* et ξ s'envoient sur le même élément dans $Def_E(S)$, il existe un $\phi' \in Mor(H^\wedge, R)$ tel que $\phi' \mapsto \xi$ et $\phi' \mapsto \phi$.

Remarque : En fait, une enveloppe est un pro-(couple) $(H^\wedge, \xi)$ où $H^\wedge \in \hat{\underline{l}}$ et $\xi \in Def_E(H^\wedge)$. ξ est la famille verselle formelle et $H^\wedge$ est la base de la déformation verselle formelle de E.

Un problème important consiste à trouver (s'il existe!) un algébrisé H de $H^\wedge$ (base de la déformation miniverselle).

L'existence de cette enveloppe pour Def_E est assurée par le théorème de Schlessinger. Par ailleurs, Laudal a montré le théroème suivant: (on "oublie" le $^\wedge$ dans les notations) H est déterminé par un morphisme de k-algèbres locales complètes

$$o : T^2 = \mathrm{Sym}_k(Ext^{2*})^\wedge \longrightarrow T^1 = \mathrm{Sym}_k(Ext^{1*})^\wedge$$

et $H = T^1 \otimes_{T^2} k$ lorsque par exemple $\dim_k A^i < +\infty$ pour $i = 1, 2$.

Autrement dit, H se présente sous la forme $k[[u_1, \ldots, u_d]]/(f_1, \ldots, f_r)$ où $u_1, \ldots, u_d$ correspond à une base de $Ext^1(E, E)$, $y_1, \ldots, y_r$ est une base de $Ext^2(E, E)$ et $f_j = o(y_j)$. Il s'agit donc de calculer les f_j.

2 Relèvements de modules et relèvements de résolutions.

Considérons $L_{.} \to E \to 0$ une résolution libre de E et on note $d : L_{i+1} \to L_i$ la différentielle. A cette résolution correspond un complexe simple associé: $(Hom^{\cdot}_A(L_., L_.), d)$ défini par :

$$Hom^p_A(L_., L_.) = \prod_{m \geq p} Hom(L_m, L_{m-p})$$

et de différentielle:

$$d^p : Hom^p_A(L_., L_.) \to Hom^{p+1}_A(L_., L_.)$$
$$d^p(\{\alpha^p_i\}_{i \geq 0}) = \alpha^p_{i-1} \circ d_i - (-1)^p d_{i-p} \circ \alpha^p_i.$$

On peut dès à présent remarquer que $Hom^{\cdot}_A(L_., L_.)$ est une algèbre différentielle graduée. Nous reviendrons plus loin sur le définition générale et le produit à mettre dans le cas présent.

Tout d'abord un lemme bien connu:

Lemme 2.1 *On a un isomorphisme naturel :*

$$Ext^i_A(E, E) \simeq H^i(Hom^{\cdot}_A(L_., L_.)).$$

Soit maintenant R, $S \in \underline{l}$ et $\pi : R \to S$ un épimorphisme tel que $I = \ker(\pi)$ vérifie $m_R \cdot I = 0$.

Définition 2.1 *On appelle relèvement du* ***complexe*** $(L_., d_i)$ *à* S *un couple* $(L_. \otimes_k S, d_i(S))$ *tel que:*

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\cdots & \to & L_2 \otimes_k S & \stackrel{d_2(S)}{\to} & L_1 \otimes_k S & \stackrel{d_1(S)}{\to} & L_0 \otimes_k S & \to & H_O(L_. \otimes_k S) & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\cdots & \to & L_2 & \stackrel{d_2}{\to} & L_1 & \stackrel{d_1}{\to} & L_0 & \to & H_0(L_.) & \to & 0
\end{array}$$

où tous les diagrammes commutent et $d_{i+1}(S) \circ d_i(S) = 0$.

Remarquons qu'on peut sans difficulté relever les L_i à S en $L_i \otimes_k S$, libres sur $A \otimes_k S$, ainsi que les d_i en $d_i(S) : L_i \otimes_k S \to L_{i-1} \otimes_k S$. Le problème est que ces $d_i(S)$ relevés n'ont, en général, aucune chance de vérifier $d_{i+1}(S) \circ d_i(S) = 0$.

Remarque : On a bien: $(L_i \otimes_k S) \otimes_S k = L_i$ et $L_i \otimes_k S$ libre sur $A \otimes_k S$ implique (car $k \to A$ plat $\Rightarrow A \otimes_k S$ plat sur S) implique que $A \otimes_k S$ est plat sur S.

Théorème 2.1 *1) Tout tel relèvement est en fait une résolution libre de* $H_0(L_. \otimes_k S) = E_S$.
2) E_S *est un relèvement de* $H_0(L_.) = E$ *à* S.

Preuve: La preuve se fait par récurrence sur la longueur de S.

Si $\ell(S) = 1$, ie. $S = k$, le résultat est trivial.

Hypothèse de récurrence: on suppose le résultat vrai pour S, à savoir, $d_i(S) \circ d_{i+1}(S) = 0$ et commutativité du diagramme $\Rightarrow$ la suite est exacte et $H_0(L_. \otimes_k S) = E_S$ est un relèvement de E à S.

Remarque: la platitude de E_S sur S est claire sous ces conditions. En effet, $k = S/m_S$, il suffit donc de montrer que $Tor_1^S(H_0(L_. \otimes_k S), k) = 0$. Or, ce groupe est le H_1 du complexe suivant:

$$\begin{array}{ccccc}
L_2 \otimes_k S \otimes_S k & \to & L_1 \otimes_k S \otimes_S k & \to & L_0 \otimes_k S \otimes_S k \\
|| & & || & & || \\
L_2 & \xrightarrow{d_2} & L_1 & \xrightarrow{d_1} & L_0
\end{array}$$

donc est zéro.

Soit donc $0 \to \mathcal{I} \to R \to S \to 0$ tel que $m_R \mathcal{I} = 0$ et considérons un relèvement de $L_. \otimes_k S$ à R ie. un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots \to & L_{i+1} \otimes_k R & \to & \xrightarrow{d_{i+1}(R)} & L_i \otimes_k R & \xrightarrow{d_i(R)} & L_{i-1} \otimes_k R & \to \cdots \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\cdots \to & L_{i+1} \otimes_k S & \to & \xrightarrow{d_{i+1}(S)} & L_i \otimes_k S & \xrightarrow{d_i(S)} & L_{i-1} \otimes_k S & \to \cdots
\end{array}$$

tel que $d_i(R) \circ d_{i+1}(R) = 0$.

Commençons par montrer que dans la situation:

$$\begin{array}{ccc}
0 & & 0 \\
\downarrow & & \downarrow \\
L_i \otimes_k \mathcal{I} & \stackrel{d_i(R)_{|L_i\otimes\mathcal{I}}}{\rightarrow} & L_{i-1} \otimes_k \mathcal{I} \\
\downarrow & & \downarrow \\
L_i \otimes_k R & \stackrel{d_i(R)}{\rightarrow} & L_{i-1} \otimes_k R \\
\downarrow & & \downarrow \\
L_i \otimes_k S & \stackrel{d_i(S)}{\rightarrow} & L_{i-1} \otimes_k S \\
\downarrow & & \downarrow \\
0 & & 0
\end{array}$$

où $d_i(R)|_{L_i\otimes_k\mathcal{I}} = d_i \otimes 1_{\mathcal{I}}$.

Or $\mathcal{I} = \mathcal{I}/m\mathcal{I}$ est engendré comme k-espace vectoriel par un nombre fini d'éléments $x_1, \ldots, x_s$ ie. un éleément x de $\mathcal{I}$ peut s'écrire $\sum a_i x_i$.

Calculons $d_i(R)(y \otimes \sum_{i=1}^s a_i x_i) = \sum_{i=1}^s a_i d_i(R)(y \otimes x_i)$.

Or, $d_i(R)$ est $A\otimes_k R$-linéaire et : $y\otimes x_i = (1\otimes x_i)(y\otimes 1) \in (A\otimes_k R)(L_i\otimes R)$, donc $d_i(R)(y \otimes x_i) = d_i(R)[(1 \otimes x_i)(y \otimes 1)] = (1 \otimes x_i)d_i(R)(y \otimes 1)$.

Or $\begin{array}{ccc} L_i \otimes 1 & \stackrel{d_i(R)}{\rightarrow} & L_{i-1} \otimes 1 \\ \cong\downarrow & & \downarrow\uparrow \\ L_i & \stackrel{d_i}{\rightarrow} & L_{i-1} \end{array}$, d'où $d_i(R)(y \otimes 1) = d_i(y) \otimes 1$.

Conclusion : $d_i(R)(y\otimes\sum a_i x_i) = \sum a_i(1\otimes x_i)d_i(y)\otimes 1 = \sum a_i d_i(y)\otimes x_i = d_i(y) \otimes \sum a_i x_i = d_i(y) \otimes x$.

On se retrouve donc avec 3 complexes et des morphismes de complexes

$$0 \rightarrow L_. \otimes \mathcal{I} \rightarrow L_. \otimes R \rightarrow L_. \otimes S \rightarrow 0$$

où les différentielles sont respectivement $d_i \otimes 1_{\mathcal{I}}$, $d_i(R)$, $d_i(S)$.

Le premier est exact car résulte d'une suite exacte tensorisée sur un corps par un espace vectoriel.

Le troisième l'est par hypothèse. D'où de la suite exacte longue:

$$\cdots \rightarrow H_n(L_. \otimes_k \mathcal{I}) \rightarrow H_n(L_. \otimes_k R) \rightarrow H_n(L_. \otimes_k S) \rightarrow H_{n-1}(L_. \otimes_k \mathcal{I}) \rightarrow \cdots$$
$$\rightarrow H_1(L_. \otimes_k S) \rightarrow H_0(L_. \otimes_k \mathcal{I}) \rightarrow H_0(L_. \otimes_k R) \rightarrow H_0(L_. \otimes_k S) \rightarrow 0,$$

on déduit que $H_n(L_. \otimes_k R) = 0,\ \forall n \geq 0$ et

$$0 \rightarrow E \otimes_k \mathcal{I} \rightarrow \underset{\substack{||\\ E_R}}{H_0(L_. \otimes_k R)} \rightarrow E_S \rightarrow 0.$$

Il est clair que $E_R \otimes_R S \cong E_S$ (en tensorisant $\begin{array}{ccc} L_1 \otimes_k R & \rightarrow & L_1 \otimes_k S \\ \downarrow & & \downarrow \\ L_0 \otimes_k R & \rightarrow & L_0 \otimes_k S \end{array}$ par $\otimes_R S$, les flèches horizontales deviennent des isomorphismes, d'où : $E_S = H_0(L_. \otimes_k S) = H_O(L_. \otimes_k R \otimes_R S) = H_0(L_. \otimes_k R) \otimes_R S = E_R \otimes_R S$).

Donc: (la platitude de E_R sur R étant assurée cf. ci-dessus), E_R est un relèvement de E_S à R.

Conclusion : s'il existe $d_i(R)$ tels que $d_i(R) \circ d_{i+1}(R) = 0$, alors E_S se rlève à R.

Reste le problème de l'existence de tels morphismes $d_i(R)$:

Calculons l'obstruction pour relever $(L_. \otimes_k S, d_i(S))$ à R. Pour chaque i, on choisit un relèvement $d'_i(R) : L_i \otimes_k R \rightarrow L_{i-1} \otimes_k R$ de $d_i(S)$. Cela est possible car les L_i sont libres :

$$\begin{array}{ccc} L_i \otimes_k R & \cdots > & L_{i-1} \otimes_k R \\ \downarrow & \searrow & \downarrow \\ L_i \otimes_k S & \rightarrow & L_{i-1} \otimes_k S \\ & & \downarrow \\ & & O. \end{array}$$

La composée $d'_{i-1}(R) \circ d'_i(R) : L_i \otimes_k R \rightarrow L_{i-2} \otimes_k R$ qui s'inscrit dans le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} & & L_{i-2} \otimes_k \mathcal{I} \\ & & \downarrow \\ L_i \otimes_k R & \rightarrow & L_{i-2} \otimes_k R \\ \downarrow & & \downarrow \\ L_i \otimes_k S & \xrightarrow{O} & L_{i-2} \otimes_k S \\ & & \downarrow \\ & & 0 \end{array}$$

donne donc lieu à un morphisme $A \otimes_k R$-linéaire :

$$L_i \otimes_k R \rightarrow L_{i-2} \otimes_k \mathcal{I}.$$

Or, $L_i \otimes_k R$ est engendré sur $A \otimes_k R$ par $L_i \otimes 1$ qui s'identifie à L_i.

D'où le morphisme ci-dessus est induit par une unique application A-linéaire

$$o_i : L_i \rightarrow L_{i-2} \otimes_k \mathcal{I} \ \ \forall i.$$

La famille $\{o_i\}_{i\geq 0}$ définit donc un élément $o \in Hom^2_A(L_., L_. \otimes_k \mathcal{I}) = Hom^2_A(L_., L_.) \otimes_k \mathcal{I}$ (cette égalité provenant du fait que $\mathcal{I}$ est un k-espace vectoriel de dimension finie : $\mathcal{I} \cong k^n \Rightarrow Hom_A(M, N \otimes_k \mathcal{I}) = Hom_A(M, N^n) = Hom_A(M, N)^n = Hom_A(M, N) \otimes_k \mathcal{I}$).

On vérifie immédiatement que $d^2(\{o_i\}) = \{o_{i-1} \circ d_i - d_{i-2} \circ o_i\} = 0$. En effet

$$\begin{array}{ccccccc}
L_i & \stackrel{d_i}{\to} & L_{i-1} & & L_{i-2} & \stackrel{d_{i-2}\otimes 1}{\to} & L_{i-3} \otimes \mathcal{I} \\
\downarrow & \circ & \downarrow & & \downarrow & \circ & \downarrow \\
L_i \otimes R & \to & L_{i-1} \otimes R & \to & L_{i-2} \otimes R & \to & L_{i-3} \otimes R
\end{array}$$

par conséquent, o est un 2-cocycle de $Hom^{\cdot}_A(L_., L_.) \otimes_k \mathcal{I}$ qui définit donc un élément $o(E_S, \pi) \in Ext^2_A(E, E) \otimes_k \mathcal{I}$.

Bien entendu, on montre que $o(E_S, \pi)$ est indépendant du choix des $d'_i(R)$ relevant les $d_i(S)$.

Supposons que $o(E_S, \pi) = 0$. Alors, il existe un élément $\xi \in Hom^1_A(L_., L_.) \otimes_k \mathcal{I}$ tel que $d\xi = -o$. On pose alors, $d_i(R) = d'_i(R) + \xi_i$.

On a $d_{i-1}(R) \circ d_i(R) = d'_{i-1}(R) \circ d'_i(R) + \xi_{i-1} \circ d'_i(R) + d'_{i-1}(R) \circ \xi_i + \xi_{i-1} \circ \xi_i$ où $d'_{i-1}(R) \circ d'_i(R) = o$ et $\xi_{i-1} \circ d'_i(R) + d'_{i-1}(R) \circ \xi_i = d\xi = -o$.

D'un autre côté, ξ_i est $A \otimes R$-linéaire, d'où, si $b \in \mathcal{I}$, $\xi_i(x \otimes b) = \xi_i(1 \otimes b)(x \otimes 1) = (1 \otimes b)\xi_i(x \otimes 1)$. Mais, $\xi_i(x \otimes 1) \in L_{i-1} \otimes \mathcal{I}$ et par conséquent, $(1 \otimes b)\xi_i(x \otimes b) \in L_{i-1} \otimes \mathcal{I}^2 = 0$, ou encore $\xi_{i|L_i \otimes \mathcal{I}} = 0$ d'où $\xi_{i-1} \circ \xi_i = 0$. Conclusion, $d_{i-1}(R) \circ d_i(R) = 0$, ce qui conclut le problème d'existence.

De plus, donnons-nous 2 relèvements $(L_. \otimes_k R, d_i(R)_j)$, $j = 1, 2$ (correspondant à 2 relèvements E^1_R, E^2_R).

Les différences $d_i(R)_1 - d_i(R)_2 : L_i \otimes R \to L_{i-1} \otimes R$ vérifiant $(1 \otimes \pi) \circ (d_i(R)_1 - d_i(R)_2) = 0$, on en déduit cf. ci-dessus, que $d_i(R)_1 - d_i(R)_2$ induit une application $\eta_i : L_i \to L_{i-1} \otimes_k \mathcal{I}$.

Ce qui donne lieu à un élément $\{\xi_i\}_{i\geq 0} \in Hom^1(L_., L_.) \otimes \mathcal{I}$ et on vérifie (ce qui permet donc de ramener l'étude de relèvement de modules à celle de relèvement de résolution de ce module) que $d(\{\xi_i\}) = 0$, autrement dit $\{\xi_i\}$ définit un cocycle, donc un élément $\bar{\eta} \in Ext^1_A(E, E) \otimes_k \mathcal{I}$.

Conclusion : 2 relèvements "diffèrent" d'un élément de $Ext^1_A(E, E) \otimes_k \mathcal{I}$, ie. l'ensemble des relèvements est un espace principal homogène sous $Ext^1_A(E, E) \otimes_k \mathcal{I}$.

3 Définition des produits de Massey.

3.1 Une définition "provisoire" .

(cf [3])

Définition 3.1 *Une algèbre différentielle graduée* $\mathcal{A} = \oplus_{k\geq 0}\mathcal{A}^k$ *est une algèbre munie d'une différentielle* d *de degré* $+1$ *telle que:*
1) $\mathcal{A}$ *est commutativement graduée ie.* $xy = (-1)^k yx$, $\forall x \in \mathcal{A}^k$, $y \in \mathcal{A}^l$.
2) d *est une dérivation ie.* $d(xy) = dx \cdot y + (-1)^k x \cdot dy$, $x \in \mathcal{A}^k$.
3) $d^2 = 0$.

Si $\mathcal{A}$ est une ADG, alors $H^*(\mathcal{A})$ est une algèbre (il suffit de le vérifier).

Il y a bien sûr quelques sorites sur les ADG tels que: définition de morphismes d'ADG, etc...

Exemples : (i) Le complexe de de Rham des formes $\mathcal{C}^\infty$ sur une variété.
(ii) La cohomologie d'un CW-complexe X, $\{H^*(X;k); d = 0\}$ où k est un corps. (c'est non commutativement gradué !).

L'idée essentielle est que ce type de structure avec ce qu'on va définir immédiatement, les produits de Massey, détermine entièrement le type d'homotopie de l'objet considéré, et, en tout cas, fournit de nouveaux invariants de ce type d'homotopie.

Soit $u_1 \in H^{p_1}, u_2 \in H^{p_2}, u_3 \in H^{p_3}$ tels que $u_1 \cdot u_2 = 0 = u_2 \cdot u_3$. Alors, on définit $< u_1, u_2, u_3 > \in H^{p_1+p_2+p_3-1}/[u_1 \cdot H^{p_2+p_3-1} + H^{p_1+p_2-1} \cdot u_3]$ par : soient a_1, a_2, a_3 des cocycles représentant u_1, u_2, u_3. Soit encore b_{12}, b_{23} tels que $db_{12} = a_1 \cdot a_2$ et $db_{23} = a_2 \cdot a_3$, on montre alors que: $b_{12} \cdot a_3 + (-1)^{p_1+1} a_1 \cdot b_{23}$ est une $(p_1 + p_2 + p_3 - 1)$-forme et $d(b_{12} \cdot a_3 + (-1)^{p_1+1} a_1 \cdot b_{23}) = db_{12} \cdot a_3 + (-1)^{p_1+p_2-1} b_{12} \cdot da_3 + (-1)^{p_1+1}(da_1 \cdot b_{23} + (-1)^{p_1} a_1 \cdot db_{23}) = 0$.

Cet élément est donc un cycle de degré $p_1 + p_2 + p_3 - 1$. Par définition, le *produit de Massey* $< u_1, u_2, u_3 >$ est un représentant dans $H^{p_1+p_2+p_3-1}$ de ce cycle. Mais, bien sûr, cette définition dépend des choix faits; lorsque l'on change ces choix, on obtient une autre classe de cohomologie, dont on vérifie qu'elle est équivalente à la première modulo $[u_1 H^{b+c-1} + H^{a+b-1} u_3]$.

Pour des opérations cohomologiques d'ordre supérieur, on pourrait penser qu'il en va de même. Ainsi, soit u_1, u_2, u_3, u_4 quatre classes de cohomologie de degrés respectifs p_1, p_2, p_3, p_4 telles que (1) $u_1 u_2 = u_2 u_3 = u_3 u_4 = 0$.

Soient alors, a_1, a_2, a_3, a_4 des représentants des u_i et b_{ij} tels que $db_{12} = a_1a_2, db_{23} = a_2a_3, db_{34} = a_3a_4$. Considérons encore le sous-ensemble du produit direct $H^{p_1+p_2+p_3-1} \times H^{p_2+p_3+p_4-1}$ constitué par :

$$(< u_1, u_2, u_3 >, < u_2, u_3, u_4 >) = \{(y, z) \mid y = \text{classe}(b_{12}a_3 - (-1)^{p_1} a_1 b_{23}) \\ z = \text{classe}(b_{23}a_4 - (-1)^{p_2} a_2 b_{34})\}$$

pour tous les choix possibles des a_i et b_{ij}. Imposons alors la condition (2) $(0, 0) \in (< u_1, u_2, u_3 >, < u_2, u_3, u_4 >)$.

Cette condition (qui implique, en particulier, que $(< u_1, u_2, u_3 >= < u_2, u_3, u_4 >= 0$) signifie qu'il existe des choix tels que $0 = \text{classe}(b_{12}a_3 - (-1)^{p_1} a_1 b_{23})$ et $0 = \text{classe}(b_{23}a_4 - (-1)^{p_2} a_2 b_{34})$. Autrement dit, il existe c_{123} et c_{234} tels que $dc_{123} = b_{12}a_3 - (-1)^{p_1} a_1 b_{23}$ et $dc_{234} = b_{23}a_4 - (-1)^{p_2} a_2 b_{34}$. Soit alors $z' = c_{123}a_4 - (-1)^{p_1+p_2-1} b_{12}b_{34} + a_1 c_{234}$. On vérifie aisément que z' est un cocycle et désignons par z sa classe de cohomologie dans $H^{p_1+p_2+p_3+p_4-2}$.

On dira, par définition, que le produit $< u_1, u_2, u_3, u_4 >$ est l'ensemble de toutes les classes pouvant être obtenues de cette manière et que z représente $< u_1, u_2, u_3, u_4 >$.

Cette définition peut bien sûr s'étendre aux ordres supérieurs.

Remarques : 1) Contrairement au cas de trois classes, ici le sous-ensemble $< u_1, u_2, u_3, u_4 >$ de $H^{p_1+p_2+p_3+p_4-2}$ n'est pas en général une classe modulo quelque sous-groupe que ce soit.

2) En réalité, W.S. Massey considère que cette définition, qu'il qualifie d'ailleurs de "provisoire" est bien trop compliquée à utiliser, que les opérations ainsi définies n'ont pas de bonnes propriétés algébriques, ...et a par conséquent caractérisé les produits ci-dessus d'autre façon (par exemple, en termes de suites spectrales).

Dans un article postérieur, J.P. May ([4]) définit des produits dans une situation plus générale. Contentons-nous ici d'un exemple : prenons U une ADG et considérons un n-uplet $(V_1, \ldots, V_n)$ où V_i est une matrice $p \times q$ à coefficients dans la cohomologie $H(U)$ et telles qu'elles forment un système multipliable (à savoir : lorsque l'on fait le produit de deux matrices successives, les dimensions étant adéquates, le coefficient du produit est une somme de termes tous de même degré).

Le *produit de Massey matriciel* $< V_1, \ldots, V_n >$ est alors *défini* s'il existe un sytème $\{A_{ij}\}_{\substack{0 \le i < j \le n \\ (i,j \neq (0,n))}}$ de matrices à coefficients dans U tel que :

(1) $A_{i-1,i}$ représente V_i pour tout i;

(2)
$$dA_{ij} = \sum_{k=i+1}^{j-1} \overline{A}_{ik} A_{kj} \ , \ 1 < j-i < n$$
où l'on note pour une matrice $A = (a_{ij})$, $\overline{A}$ la matrice dont le ij-ième coefficient est $(-1)^{\deg(a_{ij})} a_{ij}$.

L'ensemble $\{A_{ij}\}$ est appelé système de définition pour le produit $< V_1, \ldots, V_n >$ et $\sum_{k=1}^{n-1} \overline{A}_{0k} A_{kn}$ est un cycle dont la classe dans $\mathrm{Mat}(H(U))$ appartient à $< V_1, \ldots, V_n >$. Le produit $< V_1, \ldots, V_n >$ est alors l'ensemble des classes d'homologie pouvant être obtenues de cette manière.
Cas particulier : $< V_1, V_2 >$ est toujours défini et réduit à $\overline{V}_1 V_2$.

On dit encore que $< V_1, \ldots, V_n >$ est strictement défini si, pour tous $1 \leq j-i \leq n-2$, $< V_i, \ldots, V_j >$ est défini (dans $\mathrm{Mat}(H(U))$) et ne contient que la matrice nulle. Ainsi tout triple produit est strictement défini.

Remarque : Si on considère des matrices 1×1, l'existence d'un système de définition équivaut exactement aux conditions (1) et (2) de Massey.

3.2 L'algèbre $Hom^{\cdot}(L., L.)$.

$Hom^{\cdot}(L., L.)$, muni de sa différentielle naturelle, notée D, et du produit défini par :
$$\alpha \cdot \beta := \alpha \circ \beta + (-1)^{ab+1} \beta \circ \alpha$$
est une algèbre de Lie différentielle graduée.

On vérifie alors facilement que :
$$\alpha \cdot \beta = (-1)^k \beta \cdot \alpha$$
et que :
$$D(\alpha \cdot \beta) = \alpha \cdot D\beta + (-1)^b D\alpha \cdot \beta$$
.

En effet, $D(\alpha \circ \beta) = \alpha \circ \beta \circ d + (-1)^{a+b+1} d \circ \alpha \circ \beta$ et $\alpha \circ D\beta = \alpha \circ (\beta \circ d + (-1)^{b+1} d \circ \beta) = \alpha \circ \beta \circ d + (-1)^{b+1} \alpha \circ d \circ \beta$ et $D\alpha \circ \beta = (\alpha \circ d + (-1)^{a+1} d \circ \alpha) \circ \beta = \alpha \circ d \circ \beta + (-1)^{a+1} d \circ \alpha \circ \beta$, d'où : $\alpha \circ D\beta + (-1)^b D\alpha \circ \beta = \alpha \circ \beta \circ d + (-1)^{b+1} \alpha \circ d \circ \beta + (-1)^b \alpha \circ d \circ \beta + (-1)^{a+b+1} d \circ \alpha \circ \beta = D(\alpha \circ \beta)$. Donc, $D(\alpha \circ \beta) = \alpha \circ D\beta + (-1)^b D\alpha \circ \beta$, d'où l'on déduit facilement la formule ci-dessus.

Remarque: lorsque $a = b = 1$, on voit que $\alpha \cdot \beta = \alpha \circ \beta + \beta \circ \alpha$ et ainsi au niveau cohomologique $\alpha \cdot \beta$ est le cup-produit symétrique.

On se contentera ici des produits de Massey (ou faudrait-il dire "du type Massey"?) de classes de degré 1, c'est-à-dire d'éléments de $H^1(Hom^{\cdot}_A(L.,L.)$ $= Ext^1_A(L.,L.)$. Par exemple, le triple produit $< a,b,c >$, pour $a,b,c \in H^1(Hom^{\cdot}_A(L.,L.) = Ext^1_A(L.,L.)$. D'après ce qui précède, si $ab = bc = 0$, on peut définir un produit qui vit dans $H^2(Hom^{\cdot}_A(L.,L.)) = Ext^2_A(L.,L.)$, modulo l'idéal (a,c). Mais, nous allons imposer la condition supplémentaire $ac = 0$, renforçant la symétrie. Alors le produit $< a,b,c >$ est défini dans $Ext^2_A(L.,L.)$ comme la classe du 2-cocycle :

$$\alpha \cdot \rho + \beta \cdot \tau + \gamma \cdot \eta$$

où $d\eta = \alpha \cdot \beta,\ d\rho = \beta \cdot \gamma,\ d\tau = \alpha \cdot \gamma$.
Remarque : Bien sûr, comme on l'a vu plus haut, cette classe dépend des choix faits.

Plus généralement, on posera la définition suivante, imposant par rapport à la définition dans le cas de Massey ou de May, des conditions plus restrictives (et plus symétriques) :

Définition 3.2 *Etant donnés p éléments $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ de $Ext^1_A(E,E)$, un système de définition pour le produit de Massey $< \alpha_1, \ldots, \alpha_p; \underline{n} >$, où $\underline{n} = (n_1, \ldots, n_d)$ est un d-uplet d'entiers, est une famille $\{\alpha_{\underline{m}}\}_{\underline{m} \in \overline{B_{\underline{n}}}}$, où $\overline{B_{\underline{n}}} = \{(m_1, \ldots, m_d) \mid 0 \leq m_i \leq n_i,\ \underline{m} \neq \underline{n}\}$, de 1-cochaînes de $Hom^1_A(L.,L.)$ telle que:*

$$\forall \underline{m} \in \overline{B_{\underline{n}}},\ \sum_{\substack{\underline{m}_1 + \underline{m}_2 = \underline{m} \\ \underline{m}_i \in \overline{B_{\underline{n}}}}} \alpha_{\underline{m}_1} \circ \alpha_{\underline{m}_2} = 0$$

et $\alpha_{i,\underline{0}} = d_i$ pour $i \geq 0$ et $\alpha_{\underline{\epsilon_\ell}} = \alpha_{(0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)}$ représente $\alpha_\ell \in Ext^1_A(E,E)$, pour $\ell = 1, \ldots, p$.

Etant donné un tel système de définition, le produit de Massey

$$< \alpha_1, \ldots, \alpha_p; \underline{n} >$$

est alors la classe dans $Ext^2_A(E,E)$ du 2-cocycle (on vérifie que c'en est un!)

$$\sum_{\substack{\underline{m}_1 + \underline{m}_2 = \underline{n} \\ \underline{m}_i \in \overline{B_{\underline{n}}}}} \alpha_{\underline{m}_1} \circ \alpha_{\underline{m}_2}.$$

Encore une fois, insistons sur le fait que ce produit est uniquement défini par le système de définition, mais changeant de système de définition, on change de produit.

Notations: On notera $<\alpha_1,\ldots,\alpha_p;(n,\underline{0})>=<\alpha_1,\ldots,\alpha_1>$,
$<\alpha_1,\ldots,\alpha_p;(n-1,1,\underline{0})>=<\alpha_1,\ldots,\alpha_1,\alpha_2>$ et
$<\alpha_1,\ldots,\alpha_p;(1,\ldots,1,\underline{0})>=<\alpha_1,\ldots,\alpha_p>$.

Exemple 1 : Prenons par exemple $|\underline{n}|=2$, $d=2$. Il y a alors trois cas possibles : $\underline{n}=(2,0)$ ou $\underline{n}=(1,1)$ ou $\underline{n}=(0,2)$.

$\underline{n}=(2,0)$: Calculons alors $<\alpha_1,\alpha_2;\underline{n}>$ avec $\underline{n}=(2,\underline{0})$ ie. $\overline{B}_{\underline{n}}=\{(0,0),(1,0)\}$. On a, avec les notations ci-dessus, $<\alpha_1,\alpha_2;(2,\underline{0})>=<\alpha_1,\alpha_1>$. La famille $\{\alpha_{\underline{m}}\}_{\underline{m}\in\overline{B}_{\underline{n}}}$ est un système de définition si $d^2=0$, ce qui correspond à $\underline{m}=(0,0)$ –toujours vérifié – et $\alpha_{(1,0)}\circ d+d\circ\alpha_{(1,0)}=0$, ce qui correspond à $\underline{m}=(1,0)$ d'où $\underline{m}_1=(0,0)$ et $\underline{m}_2=(1,0)$. Cette condition équivalant à $D\alpha_{\epsilon_1}=0$ toujours vérifiée aussi.

On peut donc définir : $<\alpha_1,\alpha_1>:=$ classe$(2\alpha_{(1,0)}\circ\alpha_{(1,0)})=2\cdot$ cup-produit symétrique de α_1 par $\alpha_1=\alpha_1\cdot\alpha_1$.

$\underline{n}=(1,1)$: De même, pour $\underline{n}=(1,1,\underline{0})$, on a $\overline{B}_{\underline{n}}=\{(0,0),(1,0),(0,1)\}$. On vérifie là-encore qu'il n'y a pas de condition pour qu'on puisse poser :

$$<\alpha_1,\alpha_2>=\text{classe}(\alpha_{(1,0)}\circ\alpha_{(0,1)}+\alpha_{(0,1)}\circ\alpha_{(1,0)})=\text{classe}(\alpha_1\cdot\alpha_2)$$

cup-produit symétrique de α_1 et α_2.

$\underline{n}=(0,2)$: Et pareillement pour $\underline{n}=(0,2)$.

Exemple 2 : Cherchons à calculer $<\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3;\underline{n}>$ où $\underline{n}=(3,\underline{0})$, $(2,1,\underline{0})$, $(1,1,1,\underline{0})$ et les symétriques de ceux-ci.

1er Cas: $\underline{n}=(3,\underline{0})$. $\overline{B}_{\underline{n}}=\{(\underline{0}),(1,\underline{0}),(2,\underline{0})\}$.

Les conditions : pour $\underline{m}=(\underline{0})$ et $\underline{m}=(1,\underline{0})$, il n'y a pas de conditions. Reste $\underline{m}=(2,\underline{0})$: il s'agit de vérifier que

$$\sum_{\substack{\underline{m}_1+\underline{m}_2=(2,\underline{0})\\ \underline{m}_i\in\overline{B}_{\underline{n}}}}\alpha_{\underline{m}_1}\circ\alpha_{\underline{m}_2}=0.$$

Or, cette expression est égale à

$$\alpha_{(2,0)}\circ d+d\circ\alpha_{(2,0)}+2\alpha_{(1,0)}\circ\alpha_{(1,0)}=D\alpha_{(2,0)}+\alpha_1\cdot\alpha_1$$

dire qu'elle est nulle équivaut donc à:

$$D\alpha_{(2,0)} = -\alpha_1 \cdot \alpha_1.$$

Autrement dit, pour qu'il existe un $\alpha_{(2,0)}$, il faut (et il suffit bien sûr) que $\alpha_1 \cdot \alpha_1 = 0$ dans $Ext^2_A(E,E)$.

Et alors,

$$< \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \underline{n} >=< \alpha_1, \alpha_1, \alpha_1 >= \text{classe}\left(\sum_{\substack{\underline{m}_1+\underline{m}_2=(3,\underline{0}) \\ \underline{m}_i \in \overline{B}_{\underline{n}}}} \alpha_{\underline{m}_1} \circ \alpha_{\underline{m}_2} \right)$$

$$= \alpha_{(1,0)} \circ \alpha_{(2,0)} + \alpha_{(2,0)} \circ \alpha_{(1,0)} = \alpha_{(1,0)} \cdot \alpha_{(2,0)}.$$

Et, $\alpha_{(2,0)}$ est un représentant de $-\alpha_1 \cdot \alpha_1$.

2ème Cas: Etudions encore le cas $\underline{n} = (1,1,1,\underline{0})$.
Alors $\overline{B}_{\underline{n}} = \{(\underline{0}), (1,\underline{0}), (0,1,\underline{0}), (0,0,1,\underline{0}), (1,1,\underline{0}), (1,0,1,\underline{0}), (0,1,1,\underline{0})\}$.
Conditions : Pas de conditions pour $\underline{m} = (\underline{0})$, $(1,\underline{0})$, $(0,1,0,\underline{0})$, $(0,0,1,\underline{0})$.

Pour $\underline{m} = (1,1,\underline{0})$, on a $\underline{m}_i = (\underline{0})$, $\underline{m}_j = (1,1,\underline{0})$ ou $\underline{m}_i = (1,\underline{0})$, $\underline{m}_j = (0,1,\underline{0})$, d'où la condition:

$$0 = \alpha_{(1,1,\underline{0})} \circ d + d \circ \alpha_{(1,1,\underline{0})} + \alpha_{(1,\underline{0})} \circ \alpha_{(0,1,\underline{0})} + \alpha_{(0,1,\underline{0})} \circ \alpha_{(1,\underline{0})}$$

ie. $D\alpha_{(1,1,\underline{0})} = -\alpha_{(1,\underline{0})} \cdot \alpha_{(0,1,\underline{0})}$ c'est-à-dire $\alpha_{(1,\underline{0})} \cdot \alpha_{(0,1,\underline{0})} = 0$ dans $Ext^2(E,E)$ ou encore $\alpha_1 \cdot \alpha_2 = 0$.

De même,
pour $\underline{m} = (1,0,1,\underline{0})$, on obtient $\alpha_{(1,\underline{0})} \cdot \alpha_{(0,0,1,\underline{0})} = 0$ ie. $\alpha_1 \cdot \alpha_3 = 0$

pour $\underline{m} = (0,1,1,\underline{0})$, on obtient $\alpha_{(0,1,\underline{0})} \cdot \alpha_{(0,0,1,\underline{0})} = 0$ ie. $\alpha_2 \cdot \alpha_3 = 0$.

Alors,

$$< \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; (1,1,1,\underline{0}) >=< \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 >= \text{classe}\left(\sum_{\substack{\underline{m}_1+\underline{m}_2=(1,1,1,\underline{0}) \\ \underline{m}_i \in \overline{B}_{\underline{n}}}} \alpha_{\underline{m}_1} \circ \alpha_{\underline{m}_2} \right)$$

$$= \text{classe}(\alpha_{(1,\underline{0})} \cdot \alpha_{(0,1,1,\underline{0})} + \alpha_{(0,1,\underline{0})} \cdot \alpha_{(1,0,1,\underline{0})} + \alpha_{(0,0,1,\underline{0})} \cdot \alpha_{(1,1,\underline{0})}).$$

Et, $\alpha_{(0,1,1,\underline{0})}$ est un représentant de $-\alpha_2 \cdot \alpha_3$
$\alpha_{(1,0,1,\underline{0})}$ est un représentant de $-\alpha_1 \cdot \alpha_3$
$\alpha_{(1,1,0,\underline{0})}$ est un représentant de $-\alpha_1 \cdot \alpha_2$.

4 Produits de Massey et module formel.

Nous allons **utiliser** la théorie de déformation pour montrer que, dans le cas de $Hom^\cdot(L., L.)$, il est bien possible de construire pas à pas des produits de Massey.

Soient $\{x_1, \ldots, x_d\}$ une base de $Ext^1(E,E)^*$, $\{y_1, \ldots, y_r\}$ une base de $Ext^2(E,E)^*$ et x_i^*, y_j^* leurs bases duales. Soit encore $\underline{n} = (n_1, \ldots, n_d)$ un multi-indice et $|\underline{n}| = \sum n_i$.

4.1 Retour aux déformations.

Rappelons quelques notations : $T^2 = \mathrm{Sym}_k(Ext^{2*})^\wedge$, $T^1 = \mathrm{Sym}_k(Ext^{1*})^\wedge$ et le module formel est de la forme $H = T^1 \otimes_{T^2} k$.

Considérons encore $\pi : R \to S$ un morphisme surjectif de k-algèbres tel que $\mathrm{m}_R \cdot \ker \pi = 0$.

On se trouve donc dans la situation suivante :

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & & 0 \\ & & & & & & \downarrow \\ & & & & & & \ker\pi \\ & & & & & & \downarrow \\ Ext^{2^*} \subset T^2 & \xrightarrow{o} & T^1 & & \xrightarrow{\overline{\phi}} & & R \\ & & & & \phi' & & \\ & & \downarrow & & \searrow & & \downarrow \pi \\ & & H & & \xrightarrow{\phi} & & S \end{array} .$$

On peut bien sûr (puisque T^1 est une k-algèbre libre) relever ϕ en $\overline{\phi}$: $T^1 \to R$.

Pour relever un module E_S sur S (ou plutôt $S \otimes_k A$) à R ($R \otimes_k A$), il faut et suffit de pouvoir relever ϕ en une application de H vers R. Il suffit pour s'en convaincre de regarder le diagramme suivant, où les flèches horizontales sont des surjections :

$$\begin{array}{ccc} Mor(H,R) & \to & Def_E(R) \\ \downarrow & & \downarrow \\ Mor(H,S) & \to & Def_E(S) \end{array} .$$

Comme $H = T^1/\mathrm{Im}(o)$, il existe une factorisation de $\overline{\phi}$ à travers H si et seulement si $\overline{\phi} \circ o = 0$. L'obstruction est donc donnée par $\overline{\phi} \circ o$ qui induit une application linéaire $Ext^{2^*} \to \ker \pi$ (car $\phi'(o(y_j)) = 0 \; \forall j$), autrement dit, par un élément $o(\pi) = \sum_j y_j^* \otimes \overline{\phi}(f_j) \in Ext^2 \otimes \ker \pi$.

4.2 Cas particulier.

Soit $\underline{n}$ un multi-indice et considérons $J_{\underline{n}} = \{u_1^{t_1} \cdots u_d^{t_d} \mid \exists i, \; t_i \gneq n_i\}$ et posons

$$R_{\underline{n}} = k[u_1, \ldots, u_d]/J_{\underline{n}} \text{ et } S_{\underline{n}} = R_{\underline{n}}/(u_1^{n_1} \cdots u_d^{n_d}).$$

On suppose encore que $i_1 < i_2 < \cdots < i_p$ sont les indices i tels que $n_i \neq 0$ et on note : $v_\ell = \overline{u}_{i_\ell}$ l'image de u_i dans $R_{\underline{n}}$ ou $S_{\underline{n}}$. Ces v_i engendrent $R_{\underline{n}}$ (ou $S_{\underline{n}}$) comme k-algèbre et forment une base $\{v_1, \ldots, v_p\}$ de $\mathrm{m}_{\underline{n}}/\mathrm{m}_{\underline{n}}^2$ (on a donc $u_i = 0$ si i n'appartient pas à $\{i_1, \ldots, i_p\}$).

Considérons encore une base monomiale $B_{\underline{n}}$ de $S_{\underline{n}}$ de la forme $\{u_{\underline{m}}\} = \{u_1^{m_1} \cdots u_d^{m_d} \mid 0 \leq m_i < n_i, \; \underline{m} \neq \underline{n}\}$.

Digression : Il y a une correspondance bijective entre les morphismes $\phi : H \to S/\mathrm{m}^2$ et les suites $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\}$, $\alpha_i \in A^1$.

A $\phi_1 : H \to S/\mathrm{m}^2$, on associe (bijectivement) l'application k-linéaire $t_\phi : A^{1*} = \mathrm{m}_H/\mathrm{m}_H^2 \to \mathrm{m}/\mathrm{m}^2$: un élément $t_\phi \in A^1 \otimes \mathrm{m}/\mathrm{m}^2 \cong \mathrm{Def}_X(S/\mathrm{m}^2)$ (car : $\mathrm{Def}_X(k[V]) \cong \mathrm{Def}(k[\epsilon] \otimes_k V) = A^1$).

Si on a fixé une base $\{\overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_p\}$ de m/m^2, alors t_ϕ s'écrit, de manière unique, dans cette base:

$$t_\phi = \sum \alpha_\ell \otimes \overline{v}_\ell, \; \alpha_\ell \in A^1.$$

Considérons donc $\underline{n} = \{n_1, \ldots, n_d\}$, $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\}$ une suite d'éléments de $Ext_A^1(E,E)$ et l'élément $\sum_{j=1}^p \alpha_j \otimes \overline{v}_j \in Ext_A^1(E,E) \otimes \mathrm{m}_{\underline{n}}/\mathrm{m}_{\underline{n}}^2$.

Ce dernier correspond alors à une application $\phi_1 : H \to S/\mathrm{m}_{\underline{n}}^2$ ou encore à un élément E_{ϕ_1} de $\mathrm{Def}_E(S/\mathrm{m}_{\underline{n}}^2)$ ie. un relèvement de E à $S/\mathrm{m}_{\underline{n}}^2$.

Un relèvement $E_{\phi_{\underline{n}}}$ (respt. E_{ϕ_1}) est représenté par $\{L. \otimes S_{\underline{n}}; d_i(S_{\underline{n}})\}$ (respt. $\{L. \otimes S_{\underline{n}}/\mathrm{m}_{\underline{n}}^2; d_i(S_{\underline{n}}/\mathrm{m}_{\underline{n}}^2)\}$ un relèvement de $L.$.

La famille d'applications $A \otimes_k S_{\underline{n}}$-linéaire :

$$d_i(S_{\underline{n}}) : L_i \otimes_k S_{\underline{n}} \to L_{i-1} \otimes_k S_{\underline{n}}$$

est déterminée uniquement par sa restriction à $L_i \otimes 1$.

Pour $x \in L_i$, $d_i(S_{\underline{n}})(x \otimes 1) \in L_{i-1} \otimes_k S_{\underline{n}}$. Or, la famille $\{1 \otimes \underline{u}^{\underline{m}}\}_{\underline{m}} \in \overline{B}_{\underline{n}}$ constitue une base de $L_{i-1} \otimes_k S_{\underline{n}}$ sur $A \otimes_k S_{\underline{n}}$, ie. tout élément de $L_{i-1} \otimes_k S_{\underline{n}}$ peut s'écrire de manière unique $\sum_{\underline{m} \in \overline{B}_{\underline{n}}} \beta_{\underline{m}} \otimes \underline{u}^{\underline{m}}$, par conséquent, $d_i(S_{\underline{n}})(x \otimes 1)$ peut s'écrire $\sum_{\underline{m} \in \overline{B}_{\underline{n}}} \beta_{i,\underline{m}} \otimes \underline{u}^{\underline{m}}$.

Ainsi, $d_i(S_{\underline{n}})$ détermine des applications (qu'on vérifie aisément être A-linéaires) :

$$\begin{array}{rccl} \alpha_{i,\underline{m}} : & L_i & \to & L_{i-1} \\ & x & \mapsto & \alpha_{i,\underline{m}}(x) = \beta_{i,\underline{m}}. \end{array}$$

Conséquence : $d_i(S_{\underline{n}})$ détermine (et est déterminé) de manière unique une collection d'applications $\{\alpha_{i,\underline{m}}\}_{\underline{m} \in \overline{B}_{\underline{m}}}$, A-linéaires de $L_i \to L_{i-1}$, donc une cochaîne $\alpha_{\underline{m}} \in Hom^1(L., L.)$, pour tout $\underline{m} \in \overline{B}_{\underline{n}}$.

De même :

$$d_i(S_{\underline{n}}/\mathrm{m}_{\underline{n}}^2)_{|L_i \otimes 1} = \sum_{k=1}^{p} \alpha_{i,\underline{\epsilon}_k} \otimes \underline{u}^{\underline{\epsilon}_k} = \sum_{k=1}^{p} \alpha_{i,\underline{\epsilon}_k} \otimes \overline{v}_k \text{ où } \underline{\epsilon}_k = (\underbrace{0, \ldots, 0, 1}_{k}, 0, \ldots, 0).$$

Notons provisoirement par commodité, $d_i(S_{\underline{n}}) = \tilde{d}_i$ et calculons :

$$\begin{aligned} \tilde{d}_{i-1} \circ \tilde{d}_i(x \otimes 1) &= \tilde{d}_{i-1}\Big(\sum_{\underline{m}_1 \in \overline{B}_{\underline{n}}} \alpha_{i,\underline{m}_1}(x) \otimes \underline{u}^{\underline{m}_1} \Big) \\ &= \sum_{\underline{m}_1 \in \overline{B}_{\underline{n}}} \tilde{d}_{i-1}(\alpha_{i,\underline{m}_1}(x) \otimes \underline{u}^{\underline{m}_1}) \\ &= \sum_{\underline{m}_1 \in \overline{B}_{\underline{n}}} (1 \otimes \underline{u}^{\underline{m}_1}) \tilde{d}_{i-1}(\alpha_{i,\underline{m}_1}(x) \otimes 1) \\ &= \sum_{\underline{m}_1 \in \overline{B}_{\underline{n}}} (1 \otimes \underline{u}^{\underline{m}_1}) \left(\sum_{\underline{m}_2 \in \overline{B}_{\underline{n}}} \alpha_{i-1,\underline{m}_2}(\alpha_{i,\underline{m}_1}(x)) \otimes \underline{u}^{\underline{m}_2} \right) \\ &= \sum_{\underline{m}_1, \underline{m}_2 \in \overline{B}_{\underline{n}}} \alpha_{i-1,\underline{m}_2} \circ \alpha_{i,\underline{m}_1}(x) \otimes \underline{u}^{\underline{m}_1 + \underline{m}_2} \\ &= \sum_{\underline{m} \in \overline{B}_{\underline{n}}} \left(\sum_{\substack{\underline{m}_1 + \underline{m}_2 = \underline{m} \\ \underline{m}_i \in \overline{B}_{\underline{n}}}} \alpha_{i-1,\underline{m}_2} \circ \alpha_{i,\underline{m}_1}(x) \right) \otimes \underline{u}^{\underline{m}} \end{aligned}$$

car dire que $\underline{m} = \underline{m}_1 + \underline{m}_2$ n'est pas dans $\overline{B}_{\underline{n}}$ implique $\underline{u}^{\underline{m}} = 0$.

Conclusion :

$$d_{i-1}\circ d_i(S_{\underline{n}}) = \sum_{\underline{m}\in\overline{B}_{\underline{n}}} \left(\sum_{\substack{\underline{m}_1+\underline{m}_2=\underline{m}\\ \underline{m}_i\in\overline{B}_{\underline{n}}}} \alpha_{i-1,\underline{m}_2}\circ\alpha_{i,\underline{m}_1}(x)\right)\otimes \underline{u}^{\underline{m}}$$

et de même :

$$d_{i-1}(S_{\underline{n}}/\mathrm{m}_{\underline{n}}^2)\circ d_i(S_{\underline{n}}/\mathrm{m}_{\underline{n}}^2) = \sum_{\substack{\underline{m}\in\overline{B}_{\underline{n}}\\ |\underline{m}|\leq 1}} \left(\sum_{\substack{\underline{m}_1+\underline{m}_2=\underline{m}\\ \underline{m}_i\in\overline{B}_{\underline{n}}}} \alpha_{i-1,\underline{m}_2}\circ\alpha_{i,\underline{m}_1}(x)\right)\otimes \underline{u}^{\underline{m}}.$$

Mais $E_{\phi_{\underline{n}}}$ (resp. E_{ϕ_1}) constitue un relèvement de E à $S_{\underline{n}}$ (resp. $S_{\underline{n}}/\mathrm{m}_{\underline{n}}^2$), d'où $d_{i-1}(S_{\underline{n}})\circ d_i(S_{\underline{n}})=0$ (resp. $d_{i-1}(S_{\underline{n}}/\mathrm{m}_{\underline{n}}^2)\circ d_i(S_{\underline{n}}/\mathrm{m}_{\underline{n}}^2)=0$).

Et, puisque $\{1\otimes\underline{u}^{\underline{m}}\}_{\underline{m}\in\overline{B}_{\underline{n}}}$ est une base, on en déduit que, pour tout $\underline{m}\in\overline{B}_{\underline{n}}$,

$$\sum_{\substack{\underline{m}_1+\underline{m}_2=\underline{m}\\ \underline{m}_i\in\overline{B}_{\underline{n}}}} \alpha_{i-1,\underline{m}_2}\circ\alpha_{i,\underline{m}_1}(x)=0$$

et dans le cas de $S_{\underline{n}}/\mathrm{m}_{\underline{n}}^2$, pour tout $\underline{\epsilon}_k\in\overline{B}_{\underline{n}}$, $\alpha_{i-1,\underline{\epsilon}_k}\circ\alpha_{i,\underline{0}}+\alpha_{i-1,\underline{0}}\circ\alpha_{i,\underline{\epsilon}_k}=0$.

Or, $\alpha_{i,\underline{0}}=d_i$ pour tout i; en d'autres termes, $\alpha_{\underline{\epsilon}_k}$ est un cocycle dans $Hom^1(L.,L.)$ et, puisque, le relèvement de E à $S_{\underline{n}}/\mathrm{m}_{\underline{n}}^2$ est représenté par $\sum_{k=1}^p \alpha_k\otimes\overline{v}_k$ et aussi par $\sum_{k=1}^p \overline{\alpha}_{\underline{\epsilon}_k}\otimes\overline{v}_k$, on en déduit que les $\alpha_{\underline{\epsilon}_k}$ représentent les classes $\alpha_k\in Ext^1_A(E,E)$.

Conséquence : $\{\alpha_{\underline{m}}\}_{\underline{m}\in\overline{B}_{\underline{n}}}$ est un système de définition pour le produit de Massey $<\alpha_1,\ldots,\alpha_p;\underline{n}>$.

Inversement, la donnée de ces $\{\alpha_{\underline{m}}\}$ détermine un relèvement de E à $S_{\underline{n}}$. (les $\alpha_{\underline{m}}$ définissent des $d_i(S_{\underline{n}})$ tels que $d_{i-1}(S_{\underline{n}})\circ d_i(S_{\underline{n}})=0$!) ie. un système de définition $\{\alpha_{\underline{m}}\}_{\underline{m}\in\overline{B}_{\underline{n}}}$ correspond à un relèvement de E à $S_{\underline{n}}$.

De plus, l'obstruction à relever $E_{\phi_{\underline{n}}}$ à $R_{\underline{n}}$, ie. obstruction à relever $\{L_i\otimes S_{\underline{n}}, d_i(S_{\underline{n}})\}$ à $R_{\underline{n}}$ est donnée par $d_{i-1}(R_{\underline{n}})\circ d_i(R_{\underline{n}})$ qui, cf. ci-dessus, est donnée par : $d_{i-1}(R_{\underline{n}})\circ d_i(R_{\underline{n}})$ qui, comme ci-dessus, est donnée par :

$$\sum_{\underline{m}\in\overline{B}_{\underline{n}}\cup\{\underline{n}\}} \left(\sum_{\substack{\underline{m}_1+\underline{m}_2=\underline{m}\\ \underline{m}_i\in\overline{B}_{\underline{n}}\cup\{\underline{n}\}}} \alpha'_{i-1,\underline{m}_2}\circ\alpha'_{i,\underline{m}_1}\right)\otimes \underline{u}^{\underline{m}}$$

où $\alpha'_{i,\underline{m}} : L_i \to L_{i-1}$ est A-linéaire.

En remarquant que : $d_i(R_{\underline{n}})$ commute avec $d_i(S_{\underline{n}}$ (c'est un relèvement !), càd.

$$\begin{array}{cccccc}
 & x\otimes 1 & \mapsto & \sum \alpha'_{i,\underline{m}} \otimes \underline{u}^{\underline{m}} & \\
x\otimes 1 & L_i \otimes R_{\underline{n}} & \overset{d_i(R_{\underline{n}})}{\to} & L_{i-1}\otimes R_{\underline{n}} & \underline{u}^{\underline{n}} \\
\downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & , \\
x\otimes 1 & L_i \otimes S_{\underline{n}} & \overset{d_i(S_{\underline{n}})}{\to} & L_{i-1}\otimes S_{\underline{n}} & 0 \\
 & x\otimes 1 & \mapsto & \sum_{\underline{m}\in \overline{B}_{\underline{n}}} \alpha_{i,\underline{m}} \otimes \underline{u}^{\underline{m}} &
\end{array}$$

on constate que, pour tout $\underline{m} \in \overline{B}_{\underline{n}}$, $\alpha'_{i,\underline{m}} = \alpha_{i,\underline{m}}$.

Tenant alors compte de $d_{i-1}(S_{\underline{n}}) \circ d_i(S_{\underline{n}}) = 0$, $d_{i-1}(R_{\underline{n}}) \circ d_i(R_{\underline{n}})$ se réduit à :

$$\sum_{\substack{\underline{m}_1+\underline{m}_2=\underline{n} \\ \underline{m}_i \in \overline{B}_{\underline{n}} \cup \underline{n}}} \alpha_{i-1,\underline{m}_2} \circ \alpha_{i,\underline{m}_1}.$$

L'image dans $Ext^2(L.,L.)$ de cette expression, qui est précisément l'obstruction, (et la somme précédente étant un cocycle) doit être nulle, ie. puisque $\alpha_{i-1,\underline{n}} \circ \alpha_{i,\underline{0}} + \alpha_{i-1,\underline{0}} \circ \alpha_{i,\underline{n}} = \alpha_{i-1,\underline{n}} \circ d_i + d_{i-1} \circ \alpha_{i,\underline{n}} \in \ \mathrm{Im}(D)$, $\sum_{\substack{\underline{m}_1+\underline{m}_2=\underline{n} \\ \underline{m}_i \in \overline{B}_{\underline{n}}}} \alpha_{\underline{m}_2} \circ \alpha_{\underline{m}_1}$ doit être un cobord.

Et cette expression représente le produit de Massey, $< \alpha_1, \ldots, \alpha_p; \underline{n} >$.

Autrement dit : **l'obstruction au relèvement à $R_{\underline{n}}$ est précisément le produit de Massey** $< \alpha_1, \ldots, \alpha_p; \underline{n} >$.

On définit alors $\alpha_{\underline{n}}$ par :

$$D(\alpha_{\underline{n}}) = - \sum_{\substack{\underline{m}_1+\underline{m}_2=\underline{n} \\ \underline{m}_i \in \overline{B}_{\underline{n}}}} \alpha_{\underline{m}_2} \circ \alpha_{\underline{m}_1}.$$

4.3 Cas général.

Notations : Dans la suite, on confondra dans une même notation ensembles de multi-indices $\{\underline{m}\}$ et ensembles de monômes correspondants $\{\underline{u}^{\underline{m}}\}$.

Posons $\overline{B}_1 = \{\underline{m} \mid |\underline{m}| \leq 1\}$ et $B'_2 = \{\underline{m} \mid |\underline{m}| = 2\}$. Notons encore $\alpha_{\underline{0}} = d \in Hom^1(L.,L.)$ et choisissons, pour chaque $\ell = 1, \ldots, d$, un représentant

$\alpha_{\underline{\epsilon}_\ell} \in Hom^1(L., L.)$ de x_ℓ. Alors, pour tout $\underline{n} \in B_2'$, le produit de Massey $< \underline{x}^*; \underline{n} >$ est bien défini par le 2-cocycle:

$$Y(\underline{n}) = \sum_{\substack{\underline{m}_1+\underline{m}_2=\underline{n} \\ \underline{m}_i \in \overline{B}_1}} \alpha_{\underline{m}_1} \circ \alpha_{\underline{m}_2}.$$

En effet, on a $D(Y(\underline{n})) = \sum_{\substack{\underline{m}_1+\underline{m}_2=\underline{n} \\ \underline{m}_i \in \overline{B}_1}} (D\alpha_{\underline{m}_1} \circ \alpha_{\underline{m}_2} - \alpha_{\underline{m}_1} \circ D\alpha_{\underline{m}_2})$. Or, $\forall \underline{t} \in \overline{B}_1$, $D\alpha_{\underline{t}} = 0$ puisqu'alors $\underline{t} = d$ ou $\alpha_{\underline{\epsilon}_\ell}$.

Ces produits de Massey sont uniquement déterminés indépendemmant des représentants choisis. En effet : soit $\alpha'_{\underline{m}_i}$ tels que $\alpha'_{\underline{m}_i} - \alpha_{\underline{m}_i} = D\beta_{\underline{m}_i}$ pour tous les $\underline{m}_i$ qui interviennent. Alors, avec des notations évidentes, $Y'(\underline{n}) - Y(\underline{n}) = \sum_{\substack{\underline{m}_1+\underline{m}_2=\underline{n} \\ \underline{m}_i \in \overline{B}_1}} (\alpha'_{\underline{m}_1} \circ \alpha'_{\underline{m}_2} - \alpha_{\underline{m}_1} \circ \alpha_{\underline{m}_2})$
$= \sum_{\substack{\underline{m}_1+\underline{m}_2=\underline{n} \\ \underline{m}_i \in \overline{B}_1}} \left[(\alpha_{\underline{m}_1} + D\beta_{\underline{m}_1}) \circ (\alpha_{\underline{m}_2} + D\beta_{\underline{m}_2}) - \alpha_{\underline{m}_1} \circ \alpha_{\underline{m}_2}\right]$
$= \sum_{\substack{\underline{m}_1+\underline{m}_2=\underline{n} \\ \underline{m}_i \in \overline{B}_1}} (\alpha_{\underline{m}_1} \circ D\beta_{\underline{m}_2} + D\beta_{\underline{m}_1} \circ \alpha_{\underline{m}_2} + D\beta_{\underline{m}_1} \circ D\beta_{\underline{m}_2})$
$= \sum_{\substack{\underline{m}_1+\underline{m}_2=\underline{n} \\ \underline{m}_i \in \overline{B}_1}} D(\alpha_{\underline{m}_1} \circ \beta_{\underline{m}_2} + \beta_{\underline{m}_1} \circ \alpha_{\underline{m}_2} + \beta_{\underline{m}_1} \circ D\beta_{\underline{m}_2})$,
d'où $Y'(\underline{n})$ et $Y(\underline{n})$ appartiennent à la même classe d'équivalence.

Posons alors, pour $j = 1, \ldots, r$,

$$f_j^2 = \sum_{|\underline{n}|=2} y_j(< \underline{x}^*; \underline{n} >) \underline{u}^{\underline{n}}.$$

Calculons alors une base monomiale B_2 de $\mathrm{m}^2/\mathrm{m}^3 + (f_1^2, \ldots, f_r^2)$ et posons $\overline{B}_2 = \overline{B}_1 \cup B_2$.

Alors, $\forall \underline{n} \leq 2$, il y a une unique relation dans $S_2 = k[\underline{u}]/\mathrm{m}^3 + (f_1^2, \ldots, f_r^2)$ (dont bien sûr, $\overline{B}_2$ constitue une base) :

$$\underline{u}^{\underline{n}} = \sum_{\underline{n} \in \overline{B}_2} \beta_{\underline{n},\underline{m}} \underline{u}^{\underline{m}}.$$

Lemme 4.1 $\forall \underline{m} \in B_2$, $\sum_{|\underline{n}|=2} \beta_{\underline{n},\underline{m}} < \underline{x}^*; \underline{n} >= 0$.

Preuve : Puisque S_2 est obtenu de $k[\underline{u}]/\mathrm{m}^3$ précisément en divisant par les obstructions f_i^2, on peut relever E (ou une résolution de E) à S_2. Autrement dit, $o(\pi_2) = 0$ où $\pi_2 : S_2 \to S_1 = k[\underline{u}]/\mathrm{m}^2$ est la surjection naturelle. Mais

$$o(\pi_2) = \sum y_j^* \otimes \overline{\phi}_1(f_j) = \sum y_j^* \otimes f_j^2(\underline{u}) = \sum y_j^* \otimes (\sum_{|\underline{n}|=2} y_j(< \underline{x}^*; \underline{n} >) \otimes \underline{u}^{\underline{n}}$$

$$= \sum_{|\underline{n}|=2} < \underline{x}^*; \underline{n} > \otimes \underline{u}^{\underline{n}} = \sum_{|\underline{n}|=2} < \underline{x}^*; \underline{n} > \otimes (\sum_{\underline{m} \in \overline{B}_2} \beta_{\underline{n},\underline{m}} \underline{u}^{\underline{m}})$$

$$= \sum_{\underline{m} \in \overline{B}_2} (\sum \beta_{\underline{n},\underline{m}} < \underline{x}^*; \underline{n} >) \otimes \underline{u}^{\underline{m}}.$$

Or, $\{\underline{u}^{\underline{m}}\}_{\underline{m}\in\overline{B}_2}$ est une base de $\ker(\pi_2)$, d'où $Ext^2 \otimes \ker(\pi_2) = Ext^2 \otimes_k \oplus_{\underline{m}\in\overline{B}_2} k \cdot \underline{u}_{\underline{m}} = \oplus_{\underline{m}\in\overline{B}_2} Ext^2 \otimes \underline{u}^{\underline{m}}$ et par conséquent :

$$o(\pi_2) = 0 \Rightarrow \forall \underline{m} \in B_2, \quad \sum_{|\underline{n}|=2} \beta_{\underline{n},\underline{m}} < \underline{x}^*; \underline{n} >= 0.$$

En conséquence, $\sum_{|\underline{n}|=2} \beta_{\underline{n},\underline{m}} Y(\underline{n})$ est un cobord. On choisit alors, pour tout $\underline{m} \in B_2$, $\alpha_{\underline{m}} \in Hom^1(L., L.)$ tel que

$$D\alpha_{\underline{m}} = - \sum_{\underline{n}\in B_2'} \beta_{\underline{n},\underline{m}} Y(\underline{n}).$$

Considérons alors une base monomiale B_3' de

$$I_3 = \mathrm{m}^3/\mathrm{m}^4 + \mathrm{m}^3 \cap \mathrm{m}(f_1^2, \ldots, f_r^2)$$

(on peut supposer que tous les éléments de B_3' sont de la forme $u_k \cdot \underline{u}^{\underline{m}}$ pour un $\underline{m} \in B_2$).

On pose $\overline{B}_3' = \overline{B}_2 \cup B_3'$. Alors, dans $R_3 = k[\underline{u}]/\mathrm{m}^4 + \mathrm{m}(f_1^2, \ldots, f_r^2)$, on a, pour tout $|\underline{n}| \leq 3$, une unique relation :

$$\underline{u}^{\underline{n}} = \sum_{\underline{m}\in\overline{B}_3'} \beta'_{\underline{n},\underline{m}} \underline{u}^{\underline{m}} + \sum_{j=1}^{r} \beta'_{\underline{n},j} f_j^2.$$

Définition 4.1 *Sous les conditions précédentes, à savoir* $\alpha_{\underline{0}} = d$, $\overline{\alpha_{\underline{\epsilon}_\ell}} = x_\ell$, $\forall \underline{m} \in B_2$, $D\alpha_{\underline{m}} = -\sum_{\underline{n}\in B_2'} \beta_{\underline{n},\underline{m}} Y(\underline{n})$, *on dit que* $\{\alpha_{\underline{m}}\}_{\underline{m}\in\overline{B}_2}$ *est un système de définition pour les produits de Massey* $< \underline{x}^*; \underline{n} >$, $\underline{n} \in B_3'$.

Dans ces conditions les produits de Massey $< \underline{x}^*; \underline{n} >$ pour $\underline{n} \in B_3'$ sont représentés par les 2-cocycles (voir lemme ci-dessous):

$$Y(\underline{n}) = \sum_{|\underline{m}|\leq 3} \sum_{\substack{\underline{m}_1+\underline{m}_2=\underline{m} \\ \underline{m}_i\in\overline{B}_2}} \beta'_{\underline{m},\underline{n}} \alpha_{\underline{m}_1} \circ \alpha_{\underline{m}_2}.$$

Lemme 4.2 *Pour tout $\underline{n} \in B_3'$, $Y(\underline{n})$ est un cocycle.*

Preuve : Considérons la situation $0 \to \ker(\pi_3') \to R_3 \to S_2 \to 0$. On sait alors que l'obstruction $o(\pi_3')$ à relever E de S_2 à R_3 est représentée par le cocycle (O_i) avec $O_i = d_{i-1}'(R_3) \circ d_i'(R_3)$ où $d_i'(R_3) : L_i \otimes R_3 \to L_{i-1} \otimes R_3$ est un relèvement quelconque de $d_i(S_2)$. Prenons donc le relèvement trivial $d_i' R_3$ défini par : $d_i'(R_3) = \sum_{\underline{m} \in \overline{B}_2} \alpha_{i,\underline{m}} \otimes \underline{u}^{\underline{m}}$.

Alors, des calculs analogues à ceux déjà effectués plus haut montrent que

$$O_i = \sum_{\underline{m}_1, \underline{m}_2 \in \overline{B}_2} \alpha_{\underline{m}_1} \circ \alpha_{\underline{m}_2} \otimes \underline{u}^{\underline{m}_1 + \underline{m}_2} = \sum_{|\underline{m}| \leq 3} \Big(\sum_{\substack{\underline{m}_1 + \underline{m}_2 = \underline{m} \\ \underline{m}_i \in \overline{B}_2}} \alpha_{\underline{m}_1} \circ \alpha_{\underline{m}_2} \Big) \otimes \underline{u}^{\underline{m}}.$$

Mais, pour tout $|\underline{m}| \leq 3$, on a $\underline{u}^{\underline{m}} = \sum_{\underline{s} \in \overline{B}_3'} \beta'_{\underline{m},\underline{s}} \underline{u}^{\underline{s}} + \sum_j \beta'_{\underline{m},j} f_j^2$, d'où :

$$O_i = \sum_{|\underline{m}| \leq 3} \Big(\sum_{\substack{\underline{m}_1 + \underline{m}_2 = \underline{m} \\ \underline{m}_i \in \overline{B}_2}} \alpha_{\underline{m}_1} \circ \alpha_{\underline{m}_2} \Big) \otimes \Big(\sum_{\underline{s} \in \overline{B}_3'} \beta'_{\underline{m},\underline{s}} \underline{u}^{\underline{s}} + \sum_j \beta'_{\underline{m},j} f_j^2(\underline{u}) \Big)$$

$$= \sum_{\underline{s} \in \overline{B}_3'} \Big(\sum |\underline{m}| \leq 3 \sum_{\substack{\underline{m}_1 + \underline{m}_2 = \underline{m} \\ \underline{m}_i \in \overline{B}_2}} \beta'_{\underline{m},\underline{s}} \alpha_{\underline{m}_1} \circ \alpha_{\underline{m}_2} \Big) \otimes \underline{u}^{\underline{s}}$$

$$+ \sum_{j, |\underline{m}| \leq 3} \sum_{\substack{\underline{m}_1 + \underline{m}_2 = \underline{m} \\ \underline{m}_i \in \overline{B}_2}} \beta'_{\underline{m},j} \alpha_{\underline{m}_1} \circ \alpha_{\underline{m}_2} f_j^2(\underline{u}) = \sum_{\underline{s} \in \overline{B}_3'} Y(\underline{s}) \otimes \underline{u}^{\underline{s}} + \text{ etc} \ldots.$$

Cette dernière expression appartenant à $(\bigoplus_{\underline{s} \in \overline{B}_3'} Hom^2 \otimes k \cdot \underline{u}^{\underline{s}}) \bigoplus (Hom^2 \otimes (f_1^2, \ldots, f_r^2)/\mathrm{m}(f_1^2, \ldots, f_r^2))$.

Or, $D(O_i) = 0$ et D respecte la décomposition en somme directe, d'où $DY(\underline{s}) = 0$, $\forall \underline{s} \in \overline{B}_3'$.

Remarque : Le relèvement de E à S_2, ou plutôt du complexe, est donné par $d_i(S_2)_{|L_i \otimes 1} = \sum_{\underline{m} \in \overline{B}_2} \alpha_{i,\underline{m}} \otimes \underline{u}^{\underline{m}}$ et on a $d_i(S_2) \circ d_{i-1}(S_2) = 0$ (ce qui d'ailleurs induit $DY(\underline{s}) = 0$ pour $\underline{s} \in \overline{B}_2$).

Inversement, comme on l'a déjà vu, la donnée d'un tel relèvement induit une famille $\{\alpha_{\underline{m}}\}_{\underline{m} \in \overline{B}_2}$.

Posons alors pour $j = 1, \ldots, r$,

$$f_j^3 = f_j^2 + \sum_{\underline{n} \in B_3'} y_j(< \underline{x}^*; \underline{n} >) \underline{u}^{\underline{n}},$$

$S_3 = R_3/(f_1^3, \ldots, f_r^3)$ et $\pi_3 : S_3 \to S_2$ la surjection naturelle. Soit B_3 une base monomiale de $\ker(\pi_3)$ telle que $B_3 \subseteq B_3'$ et notons encore $\overline{B}_3 = \overline{B}_2 \cup B_3$.

Alors, pour tout $|\underline{n}| \leq 3$, il y a une unique relation dans S_3 :

$$\underline{u}^{\underline{n}} = \sum_{\underline{n} \in \overline{B}_3} \beta_{\underline{n},\underline{m}} \underline{u}^{\underline{m}}.$$

Lemme 4.3 *$\forall \underline{m} \in B_3$, $\sum_{\underline{n} \in B_3'} \beta_{\underline{n},\underline{m}} < \underline{x}^*; \underline{n} >= 0$, ie. $\sum_{\underline{n} \in B_3'} \beta_{\underline{n},\underline{m}} Y(\underline{n})$ est un cobord.*

Preuve : Comme S_3 est obtenu de R_3 en divisant par l'idéal engendré par les obstructions à relever E de S_2 à R_3, on a $o(\pi_3) = 0$. Mais, à nouveau,

$$o(\pi_3) = \sum_j y_j^* \otimes f_j^3(\underline{u}) = \sum_j y_j^* \otimes (f_j^2(\underline{u}) + \sum_{\underline{n} \in B_3'} y_j(< \underline{x}^*; \underline{n} >) \underline{u}^{\underline{n}})$$

$$= \sum_j y_j^* \otimes f_j^2(\underline{u}) + \sum_j \sum_{\underline{n} \in B_3'} y_j^* \otimes y_j(< \underline{x}^*; \underline{n} >) \underline{u}^{\underline{n}} = \sum_{\underline{n} \in B_3'} < \underline{x}^*; \underline{n} > \otimes \underline{u}^{\underline{n}}$$

puisque la première partie de la somme correspond à $o(\pi_2) = 0$.

Or, pour tout $|\underline{n}| \leq 3$, on a $\underline{u}^{\underline{n}} = \sum_{\underline{s} \in \overline{B}_3} \beta_{\underline{n},\underline{s}} \underline{u}^{\underline{s}}$. Et par conséquent,

$$o(\pi_3) = \sum_{\underline{n} \in B_3'} < \underline{x}^*; \underline{n} > \otimes \sum_{\underline{s} \in \overline{B}_3} \beta_{\underline{n},\underline{s}} \underline{u}^{\underline{s}} = \sum_{\underline{s} \in \overline{B}_3} (\sum_{\underline{n} \in B_3'} \beta_{\underline{n},\underline{s}} < \underline{x}^*; \underline{n} >) \otimes \underline{u}^{\underline{s}} = 0$$

d'où à nouveau : $\forall \underline{s} \in \overline{B}_3$, $\sum_{\underline{n} \in B_3'} \beta_{\underline{n},\underline{s}} < \underline{x}^*; \underline{n} >= 0$.

Dès lors, pour tout $\underline{m} \in B_3$, choisissons un $\alpha_{\underline{m}} \in Hom^1(L., L.)$ tel que :

$$D(\alpha_{\underline{m}}) = - \sum_{\underline{n} \in B_3'} \beta_{\underline{n},\underline{m}} Y(\underline{n}).$$

Considérons alors une base monomiale B_4' de

$$I_4 = \frac{\mathrm{m}^4}{\mathrm{m}^5 + \mathrm{m}^4 \cap \mathrm{m}(f_1^3, \ldots, f_r^3)}$$

(ici encore, on peut supposer que tous les éléments sont de la forme $u_k \underline{u}^{\underline{m}}$ pour un $\underline{m} \in B_3$). On pose aussi $\overline{B}_4' = \overline{B}_3 \cup B_4'$. Alors, dans $R_4 = k[\underline{u}]/\mathrm{m}^5 + \mathrm{m}(f_1^3, \ldots, f_r^3)$, on a, pour tout $|\underline{n}| \leq 4$, une unique relation :

$$\underline{u}^{\underline{n}} = \sum_{\underline{m} \in \overline{B}_4'} \beta'_{\underline{n},\underline{m}} \underline{u}^{\underline{m}} + \sum_j \beta'_{\underline{n},j} f_j^3.$$

Et on recommence le processus. Ainsi, après avoir défini successivement les ensembles de multi-indices $B'_{r-1}, \overline{B}_{r-1}, B'_r, \overline{B}'_r$ pour $r = 2, \ldots, k$, nous pouvons poser :

Définition 4.2 *Une famille $\{\alpha_{\underline{m}}\}_{\underline{m} \in \overline{B}_{k-1}}$ de 1-cochaînes de $Hom^{\cdot}(L., L.)$ est un système de définition pour les produits de Massey $< \underline{x}^*; \underline{n} >$, $\underline{n} \in B'_k$ si $\alpha_{\underline{0}} = d$, $\overline{\alpha_{\underline{\epsilon}_\ell}} = x_\ell$ et si, pour $r = 2, \ldots, k-1$, $\forall \underline{m} \in B_r$, $D\alpha_{\underline{m}} = -\sum_{\underline{n} \in B'_r} \beta_{\underline{n},\underline{m}} Y(\underline{n})$.*

Alors, les produits $< \underline{x}^*; \underline{n} >$, $\underline{n} \in B'_k$ sont représentés par les 2-cocycles (cf. lemme)

$$Y(\underline{n}) = \sum_{|\underline{m}| \leq k} \sum_{\substack{\underline{m}_1 + \underline{m}_2 = \underline{m} \\ \underline{m}_i \in \overline{B}_{k-1}}} \beta'_{\underline{m},\underline{n}} \alpha_{\underline{m}_1} \circ \alpha_{\underline{m}_2}.$$

On pose, pour $j = 1, \ldots, r$, $f_j^k = f_j^{k-1} + \sum_{\underline{n} \in B'_k} y_j(< \underline{x}^*; \underline{n} >) \underline{u}^{\underline{n}}$, $S_k = R_k/(f_1^k, \ldots, f_r^k)$ et $\pi_k : S_k \to S_{k-1}$ la surjection naturelle. Soit encore B_k une base monomiale de $\ker(\pi_k))$ telle que $B_k \subseteq B'_k$ et $\overline{B}_k = \overline{B}_{k-1} \cup B_k$.

On a alors une unique relation dans S_k :

$$\forall |\underline{m}| \leq k \ , \ \underline{u}^{\underline{n}} = \sum_{\underline{n} \in \overline{B}_k} \beta_{\underline{n},\underline{m}} \underline{u}^{\underline{m}}$$

et $\sum_{\underline{n} \in B'_k} \beta_{\underline{n},\underline{m}} Y(\underline{n})$ est un cobord, d'où la définition de $\alpha_{\underline{m}} \in Hom^1(L., L.)$ pour $\underline{m} \in B_k$.

Ce processus se poursuivant indéfiniment. Remarquons que d'après 4.2.4 de [1], on a alors $H = \lim\limits_{\substack{\leftarrow \\ k}} S_k$ et donc $H \cong k[[u_1, \ldots, u_d]]/(\overline{f}_1, \ldots, \overline{f}_r)$ où $\overline{f}_j = \lim\limits_{k \to \infty} f_j^k$.

Remarques : 1) A chaque stade, en posant $d_i(S_k)_{|L_i \otimes 1} = \sum_{\underline{m} \in \overline{B}_k} \alpha_{i,\underline{m}} \otimes \underline{u}^{\underline{m}}$, on obtient un relèvement du complexe jusqu'à S_k.

2) En fait le processus s'arrête (les $\overline{f}_j$ sont donc des polynômes) si l'on obtient, pour un k, $d_i(S) \circ d_{i-1}(S) = 0$ pour $S = k[\underline{u}]/(f_1^k, \ldots, f_r^k)$.

3) On voit bien où intervient la théorie des relèvements dans la construction des produits successifs : on l'utilise pour, d'une part prouver que les $Y(\underline{n})$ sont des cocycles, d'autre part construire les $\alpha_{\underline{m}}$ de niveau supérieur.

4) Rappelons une fois encore que les produits de Massey (sauf les premiers) dépendent des choix des systèmes de définition choisis à chaque niveau.

References

[1] Laudal O. A. Matric Massey products and formal moduli I. Algebra, Algebraic topology and their interactions. L.N. in Mathematics, Springer-Verlag No 1183 (1986) pp. 218-240.

[2] Laudal O.A. Formal moduli of algebraic structures. L.N. in Mathematics, Springer-Verlag No 754 (1979).

[3] Massey W.S. Some higher order cohomology operations. Symposium internacional de topologia algebraica, 145-154. Mexico City (1958).

[4] May J.P. Matric Massey Products. Journal of Algebra 12, 533-568 (1969).

[5] Siqueland A. Global matric Massey products and formal moduli. Preprint Oslo (1995).

Annexe 1

Une remarque sur la méthode utilisée pour le calcul effectif des bases B'_{i+1}.

Considérons r polynômes $f_1, \ldots, f_r$ à n variables $x_1, \ldots, x_n$. Il s'agit donc de trouver une base B'_{i+1} de $\mathrm{m}^{i+1}/\mathrm{m}^{i+2} + \mathrm{m}^{i+1} \cap \mathrm{m}(f_1, \ldots, f_r)$.

Pour cela, commençons par faire le produit des f_i par chacun des monômes de degré 1 et soit $\mathcal{I} = (x_1 f_1, x_2 f_1, \ldots, x_n f_r)$ et notons pour simplifier $g_1 = x_1 f_1, g_2 = x_2 f_1$ etc...et $g_s = x_n f_r$.

On homogénéise en ajoutant une variable t en $\overline{g}_1, \ldots, \overline{g}_s$. Puis calculons une base de Groebner de $\overline{\mathcal{I}} = (\overline{g}_1, \ldots, \overline{g}_s)$ par rapport aux variables $(t, x_1, \ldots, x_n)$ dans cet ordre (t étant donc la variable de poids déterminant) (ce calcul peut évidemment être réalisé par la fonction de *Mathematica GroebnerBasis*).

On obtient alors un système de générateurs $(h_1, \ldots, h_\rho)$ de $\overline{\mathcal{I}}$ tels que $\mathrm{In}(\overline{\mathcal{I}}) = (\mathrm{In}(h_1), \ldots, \mathrm{In}(h_\rho))$.

Notons encore, pour chaque i, h'_i le coefficient dominant de h_i par rapport à la seule variable t. Soit alors $\mathcal{J} = (h'_1, \ldots, h'_\rho)$.

A présent, pour chaque $k = 1, \ldots, \rho$, faisons le produit de h'_k par tous les monômes de degré $d_k = i - \text{valuation}(h'_k)$. On obtient ainsi des polynômes $h"_1, \ldots, h"_\ell$. Ecrivons alors la partie de degré $i+1$ de $h"_k$ dans la base constituée des monômes de $\mathrm{m}^{i+1}/\mathrm{m}^{i+2}$. Cela donne une matrice (on écrit les vecteurs en ligne) :

$$\begin{pmatrix} \mathrm{coeff}_{x_1^{i+1}}(h"_1) & \dots & \mathrm{coeff}_{x_n^{i+1}}(h"_1) \\ \vdots & & \vdots \\ \mathrm{coeff}_{x_1^{i+1}}(h"_\ell) & \dots & \mathrm{coeff}_{x_n^{i+1}}(h"_\ell) \end{pmatrix}$$

En opérant une réduction de cette matrice selon les lignes et en retirant de la base de $\mathrm{m}^{i+1}/\mathrm{m}^{i+2}$ les monômes correspondant aux "1" principaux de cette réduction, on obtient alors une base B'_{i+1} cherchée.

Remarque : On procède de manière analogue pour le calcul des bases B_i.

Annexe 2

En collaboration avec G. Hunault (Université d'Angers), dont les connaissances tant en programmation qu'en Mathematica m'ont été indispensables, nous avons écrit un programme en Mathematica (version 2.0) pour effectuer le calcul des premiers produits (la trop grande complexité d'une part, le défaut d'optimisation du programme d'autre part empêchent d'aller à des niveaux très élevés même dans des cas simples !). Pour cela, il faut entrer dans un fichier d'initialisation une base de Ext^1 et Ext^2 sous forme matricielle (voir un exemple de fichiers d'initialisation plus loin). Le programme se lance alors, une fois dans l'environnement Mathematica, simplement par la commande << MASSEY. Il suffit alors de répondre aux questions "Quel fichier d'initialisation ?", et "Jusqu'à quel niveau veut-on aller ?".

Un exemple de programme d'initialisation :

On prend comme module M la normalisée de l'anneau de la courbe affine d'équation $x_1^4 + x_2^3 = 0$.

```
(* Initialisations de toutes les variables *)

nbv = 2               ;   (* Dimension de Ext1 = nombre de variables *)
r   = 2               ;   (* Dimension de Ext2 = nombre d'quations     *)
polp = x1^4 + x2^3  ;     (* quation de la courbe *)

(* suite des differentielles de la resolution de M *)
d[1] = {{x1,-x2^2},{x2,x1^3}}   ;
d[2] = {{x1^3,x2^2},{-x2,x1}}   ;
d[3] = d[1]                     ;
d[4] = d[2]                     ;

(* base de Ext2 : dans ys[i,j], i est l'indice du vecteur et j est *)
```

```
(* l'indice dans Hom j (M,M)                                          *)
(* on note xs[i,j] l'element x_j^* (i)  et y_j^* (i)                  *)

xs[1,1] = {{-1,0 },{0,x1^2}}  ;       xs[1,2] = {{x1^2,0} , { 0,-1 }};
xs[2,1] = {{0,x2}  , {1,0} }  ;       xs[2,2] = {{ 0 ,-x2},{-1,0}  } ;

ys[2,1] = {{ 1,0 }, {0,1}}    ;       ys[2,2] = {{0,-x2},{x1^2,0}}   ;
ys[3,1] = {{ 1,0 }, {0,1}}    ;       ys[3,2] = {{0,-x1^2 x2},{1,0}} ;

(* dans alpha(i,m), i est l'indice de la place dans la suite ie. alpha(i,m) *)
(* appartient a Hom^i(M,M) et m est le multi-indice                          *)

alpha[iindi_Integer,{0,0}] = d[iindi] ;  (* alpha(i,(0,0)) = d_i *)

alpha[1 ,{1,0}] = xs[1,1] ;     (* ces alpha representent les generateurs de Ext^1 *)
alpha[1 ,{0,1}] = xs[2,1] ;
alpha[2 ,{1,0}] = xs[1,2] ;
alpha[2 ,{0,1}] = xs[2,2] ;
```

Il suffit en fait de recopier ce fichier et d'y modifier nbv, r, polp, d[1],d[2], les xs[,] et ys[,].

Résultat :

Pour finir, voyons le résultat de ce programme avec le fichier d'initialisation ci-dessus où la limite a été fixée à 4:

```
(* Programme de calcul de produits de Massey : massey.m *)
(* 12 Juillet 93  *)
(* par Gilles Hunault et Daniel Schaub *)
(* Faculte des Sciences - Universite d'Angers, 49045 ANGERS Cedex .*)
(*  E-mail : schaub@univ-angers.fr *)

(* necessite la presence des 2 programmes suivants *)
<< algcom.m       (* fonctions generales d'algebre commutative *)
<< fonction.m     (* fonctions specifiques au calcul des produits de Massey *)

Print["Voici les fichiers d'initialisation possibles : \n"] ;
!dir ini*.*
nom=InputString["Entrer le nom du fichier d'initialisation (avec extension): "];
Get[nom];
Print["Vous avez choisi : ", nom,"\n"] ;

(* les fi *)
ldv = ListeDeVariables[nbv];        (* initialise des noms de variables *)
auldv = {x1,x2};                            (* initialise une autre liste de variables *)

f = Table[0,{i,1,r}];                        (*  mises a zero et premieres bases ...*)

(* initialisations des bases:  Bp2 <==> B'^2   et bp2b <==> bar(B')^2  *)

bp2   = Monome[nbv,r] ;               (* appels de fonctions de algcom.m *)
bp2b  = MonomeInf[nbv,r] ;
```

```
(* les beta et beta' : betap[mm,nn] <===> beta[mm,nn] ou mm et nn sont dans bp2b
     <===> delta[mm,nn] dans un premier temps  *)

bbarreMono = MonomeInf[nbv,1];  (* appels de fonctions de algcom.m *)
bbarre = MonToMind[bbarreMono];
btoucourMono = Monome[nbv,1] ;
btoucour = MonToMind[btoucourMono];

(* Debut de la boucle *)

i=1       ;                    (* i global de l'algorithme *)
rangi = 2 ;           (* numero dans la suite des applications de Hom.(L.,L.) *)

Print[" Jusqu'a quel degre voulez-vous pousser le calcul ? "] ;
valfin=Input[" (0 (zero!)pour une demande a chaque iteration) : " ] ;
testefin = 0;
nbiter   = 0;

While[testefin <= valfin,
     If[And[valfin>0,testefin<valfin],testefin++] ;
     nbiter++;
     Print["                      ----> Iteration no",nbiter] ;
     i++;

      (* calcul de la nouvelle base bpiplus *)
     zero = Table[0,{ijklmn,1,r}];
     If[f==zero,leady = f,
         ideal = Outer[Times,f,Monome[nbv,1]];
         leady = BaseStd[ideal,ldv]
     ];(* fin de if *)
     Print [ " nouvb1 " , Timing[NouvB[1,leady] ] ];
     bpiMono = bpil;
     bpi=MonToMind[bpiMono]; (* B'i *)
     baseprim[i]=bpi;
     bpib = Join[bbarre,bpi];  (* B'i barre *)
     bpibMono = Join[bbarreMono,bpiMono];

       (* calcul des betaprimes *)
     Print [ " betaprime  " , Timing[Calculebetaprime ] ] ;

     (* execution de la boucle principale *)
     Print [ " bouprin " , Timing[BouPrin ] ] ;

     (* calcul des nouvelles bases B et Bbarre *)
     leady = BaseStd[f,ldv];
     Print [ " nouvb2 " , Timing[NouvB[2,leady] ] ];
     btoucourMono = bpil;
     btoucour = MonToMind[btoucourMono];
     bbarreMono = Join[bbarreMono,bpil];
     bbarre = MonToMind[bbarreMono];

     (* calcul des betas *)
     Print [ " CalculeBeta " , Timing[Calculebeta] ] ;

     (* calcul des alphas superieurs *)
     Print [ " CalculeAlpha " , Timing[Calculealpha ] ];
```

```
     If[Or[testefin==0,testefin==valfin], Block[{},
              repfin = Input["Fin ? (0 (zero !) pour continuer,1 pour stopper):"] ;
     If[repfin==0,testefin=valfin,testefin=valfin+1] ]
   ]
] ;                   (* fin de While et donc du programme *)

Voici les fichiers d'initialisation possibles :
Vous avez choisi : inideu.m
 Jusqu'a quel degre voulez-vous pousser le calcul ?
                      ----> Iteration no1
latba= {}
 fin de nouvB
 nouvb1 {0.05 Second, Null}
 betaprime  {1.21 Second, Null}
 Au rang : 2
bpi={{0, 2}, {1, 1}, {2, 0}}
mid1={0, 2}
 yni= {{-x2, 0}, {0, -x2}}
 dans le while, degPos = 0
f[[1]]=0
f[[2]]=0
mid1={1, 1}
 yni= {{0, 0}, {0, 0}}
 dans le while, degPos = 0
f[[1]]=0
f[[2]]=0
mid1={2, 0}
           2             2
 yni= {{-x1 , 0}, {0, -x1 }}
 dans le while, degPos = 0
 dans le while, degPos = 1
f[[1]]=0
f[[2]]=0
  --> au rang 2 dans la suite : f1 = 0
  --> au rang 2 dans la suite : f2 = 0
 bouprin {7.14 Second, Null}
latba= {}
 fin de nouvB
 nouvb2 {0.05 Second, Null}
 CalculeBeta {1.05 Second, Null}
 degrsa 0
alpha[1,eltXm] mod nul={{0, 1}, {0, 0}}
alpha[2,eltXm] mod nul={{0, -1}, {0, 0}}
 degrsa 0
alpha[1,eltXm] mod nul={{0, 0}, {0, 0}}
alpha[2,eltXm] mod nul={{0, 0}, {0, 0}}
 degrsa 0
 degrsa 1
alpha[1,eltXm] mod nul={{0, 0}, {0, -x1}}
alpha[2,eltXm] mod nul={{-x1, 0}, {0, 0}}
 CalculeAlpha {6.48 Second, Null}
                      ----> Iteration no2
latba= {}
 fin de nouvB
 nouvb1 {0.05 Second, Null}
 betaprime  {3.63 Second, Null}
 Au rang : 2
```

```
bpi={{0, 3}, {1, 2}, {2, 1}, {3, 0}}
mid1={0, 3}
 yni= {{-1, 0}, {0, -1}}
 dans le while, degPos = 0
         3
f[[1]]=-y
f[[2]]=0
mid1={1, 2}
 yni= {{0, 0}, {0, 0}}
 dans le while, degPos = 0
         3
f[[1]]=-y
f[[2]]=0
mid1={2, 1}
 yni= {{0, 0}, {0, 0}}
 dans le while, degPos = 0
         3
f[[1]]=-y
f[[2]]=0
mid1={3, 0}
 yni= {{x1, 0}, {0, x1}}
 dans le while, degPos = 0
         3
f[[1]]=-y
f[[2]]=0
                                       3
  --> au rang 3 dans la suite : f1 = -y
  --> au rang 3 dans la suite : f2 = 0
 bouprin {7.52 Second, Null}
          3
latba= {-y }
liste a tuer ={{1}}
    2   2     3
{x y , x  y, x }
 fin de nouvB
 nouvb2 {0.11 Second, Null}
 CalculeBeta {3.46 Second, Null}
 degrsa 0
alpha[1,eltXm] mod nul={{0, 0}, {0, 0}}
alpha[2,eltXm] mod nul={{0, 0}, {0, 0}}
 degrsa 0
alpha[1,eltXm] mod nul={{0, 0}, {0, 0}}
alpha[2,eltXm] mod nul={{0, 0}, {0, 0}}
 degrsa 0
alpha[1,eltXm] mod nul={{0, 0}, {0, 1}}
alpha[2,eltXm] mod nul={{1, 0}, {0, 0}}
 CalculeAlpha {2.91 Second, Null}
                      ----> Iteration no3
            3     4
latba= {-(x y ), -y }
liste a tuer ={{1}, {2}}
  2  2   3     4
{x  y , x  y, x }
 fin de nouvB
 nouvb1 {0.11 Second, Null}
 betaprime  {9.83 Second, Null}
 Au rang : 2
```

```
bpi={{2, 2}, {3, 1}, {4, 0}}
mid1={2, 2}
 yni= {{0, 0}, {0, 0}}
 dans le while, degPos = 0
        3
f[[1]]=-y
f[[2]]=0
mid1={3, 1}
 yni= {{0, 0}, {0, 0}}
 dans le while, degPos = 0
        3
f[[1]]=-y
f[[2]]=0
mid1={4, 0}
 yni= {{-1, 0}, {0, -1}}
 dans le while, degPos = 0
        4    3
f[[1]]=-x  - y
f[[2]]=0
                                      4    3
  --> au rang 4 dans la suite : f1 = -x  - y
  --> au rang 4 dans la suite : f2 = 0
 bouprin {11.81 Second, Null}
            3     4
latba= {-(x y ), -y }
liste a tuer ={{1}, {2}}
  2  2   3     4
{x  y , x  y, x }
 fin de nouvB
 nouvb2 {0.16 Second, Null}
 CalculeBeta {11.37 Second, Null}
 degrsa 0
alpha[1,eltXm] mod nul={{0, 0}, {0, 0}}
alpha[2,eltXm] mod nul={{0, 0}, {0, 0}}
 degrsa 0
alpha[1,eltXm] mod nul={{0, 0}, {0, 0}}
alpha[2,eltXm] mod nul={{0, 0}, {0, 0}}
 degrsa 0
alpha[1,eltXm] mod nul={{0, 0}, {0, 0}}
alpha[2,eltXm] mod nul={{0, 0}, {0, 0}}
 CalculeAlpha {3.41 Second, Null}
```

On vérifie donc ici que $f_1 = -x^4 - y^3$ et $f_2 = 0$, donc $H \cong k[[x,y]]/(x^4+y^3)$ comme attendu.