Réponse à une question de divisibilité d'un germe analytique par un polynôme

Z. Denkowska

Université d'Angers

Résumé La question suivante m'a été posée pendant mon séjour à Bures sur Yvette en février 1999: Si f est un germe de fonction analytique, régulière en z et en u au sens de Weierstrass, est-ce qu'il existe un polynôme en (z, u) aux coefficients analytiques tel que f est le produit de ce polynôme et d'une unité? La réponse est négative et on donne ici un contrexemple.

Keywords.Weierstrass division theorem,semialgebraic sets, Nash functions;

AMS Classification 32B20

1. Introduction

Supposons que $f(z, u, \lambda)$ est un germe en 0 d'une fonction analytique réelle, regulière (dans le sens de Weierstrass) en z et en u.

La question est s'il existe un polynôme

$$P(z, u, \lambda) = \sum_{i,j=1}^{k} a_{ij}(\lambda) z^i u^j$$

aux coefficients analytiques en λ,
et une unité $v(z, u, \lambda)$ tels que:

$$f(z, u, \lambda) = v(z, u, \lambda) \sum_{i,j=1}^{k} a_{ij}(\lambda) z^i u^j \tag{1}$$

La réponse est négative et nous allons construire ici un contre-exemple simple et effectif.

Prenons

$$f(z, u, x, y) = (xe^z - y)^2 + (u - z)^2 \tag{2}$$

C'est clair que cette fonction est analytique réelle et régulière en z et en u dans un voisinage de zéro.

Nous citons ici quelques définitions et un théorème que nous allons utiliser (voir [1] et [2])

Définition 1. On dit que le germe $f : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ est régulier en x_i si $f(0, ..., x_i, ..., O) \not\equiv 0$

Cette condition entraîne la thèse du théorème de Weierstrass: un germe analytique regulier en x_i sera factorisé en une unité et un polynôme distingué en x_i.

Rappel. Un ensemble localement semi-algébrique est un ensemble A semi-analytique dans un espace affine M et tel que la description de A est donnée par des polynômes.

Définition 2. Un ensemble A semi-analytique dans $M \times N$ est appelé N - localement semi-algébrique s'il est décrit dans $M \times N$ par les polynômes en variables qui appartiennent à N et aux coefficiants analytiques en variables appartenants à M.
Si on note les coordonnées des variables de M par $(x_1, ..., x_n)$ et les coordonnées des variables en N par $(y_1, ..., y_k)$, on dira alors que A est y-localement semi-algébrique.

Rappel La description de A dans un voisinage U de zéro est de la forme:

$$A \cap U = \bigcup_{i=1}^{n} \bigcap_{j=1}^{k} \{f_{ij} * \ 0\} \tag{3}$$

avec * qui remplace une inégalité forte ou une égalité.

Théorème clé ([2])
Soient M et N deux espaces affines , l'ensemble A contenu et semi-analytique dans $M \times N$, de plus A est R-relativement compact et S-localement semi-algébrique,
où l'espace N est encore le produit cartesien $R \times S$, et soit π la projection sur $M \times R$ parallèlle à S,
alors l'ensemble $\pi(A)$ est R-localement semi-algébrique.
Ce théorème est démontré en détail dans [2].
Nous donnons une esquise de démonstration dans l'annexe, elle est analogue à la démonstration du théorème de Tarski-Seidenberg faite avec le lemme dit "de saucissonnage" de Cohen, cité lui aussi dans l'annexe.

Définition 3. Une fonction f analytique réelle dans un ouvert U d'un espace affine M est appelée analytique-algébrique (ou de Nash) en $x_0 \in U$ s'il existe un polynôme $W(x, y) \in \mathbb{R}[x, y]$ non-identiquement nul et tel que $W(x, f(x)) \equiv 0$ dans un voisinage de x_0.

Autres définitions équivalentes ([1], [2]):
(*) le germe de f en x_0 est algébrique sur l'anneau des germes des polynômes en x_0
(**) il existe un voisinage U de x_0 tel que la restriction f_U est semi-algébrique (c.à.d. son graphe est semi-algébrique) dans U.

Rappel ([2], [3])
$f = (f_1, ..., f_k)$ est de Nash en x_0 (par définition) si toute f_i est de Nash en x_0.
f est de Nash dans un ouvert U (par définition) si elle est de Nash en chaque point de U.
Un sous-ensemble de U qui est décrit dans U par les fonctions de Nash dans U est semi-algébrique dans U.
Si U est un ouvert connexe et f est de Nash en un point de U, elle est de Nash dans tout U, avec le même polynôme W.

2. Construction du contre-exemple

Citons d'abord un exemple fourni dans [2] d'un ensemble semi-analytique dans $M \times N$ mais qui n'est pas N-semi-algébrique.
Pour cela, il suffit de prendre g une fonction analytique réelle, non-algébrique (non-Nash) dans un voisinage de zéro dans $\mathbb{R}$.
L'ensemble

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = xg(z)\} \tag{4}$$

n'est pas z-semi-algébrique en zéro.
Remarquons que A est un ensemble semi-analytique dans $\mathbb{R}^3$ de dimension deux.

Dans le cas contraire (si A était z-semi-algébrique en zéro) on aurait une description de A dans un voisinage U de zéro (on peut prendre U tel que $A \cap U$ connexe) par des polynômes en z aux coefficients analytiques en (x, y).
Parmi ces polynômes (qu'on peut supposer non-identiquement nuls) il en existe un qui s'annule sur $A \cap U$ (sinon, l'intérieur de $A \cap U$ serait non-vide) .
Appelons ce polynôme H.
H est donc un polynôme en z, non identiquement nul et tel que $H(x, xg(z), z) \equiv 0$.

On développe H en série de polynômes P_i homogènes en x et en y.

$$H(x, y, z) = \sum_{i=1}^{\infty} P_i(x, y, z) \tag{5}$$

Pour tout i on a donc $P_i(x, xg(z), z) \equiv 0$.

En choisissant P_i non identiquement nul et $a > 0$ suffisamment petit, on a

$$P_i(a, ag(z), z) \equiv 0$$

Si maintenant on fixe a assez petit, $P_i(a, ay, z)$ sera le polynôme h(y,z) non identiquement nul et qui annule la fonction g(z) , qui alors serait de Nash en zéro, d'où contradiction.

Prenons maintenant l'ensemble

$$B = \{(z, u, x, y) \in \mathbb{R}^4 : f(z, u, x, y) = 0 \ et \ u \in]-M, M[\} \tag{6}$$

où f est la fonction (2).

C'est un ensemble semi-analytique dans $\mathbb{R}^4$ et relativement compact par rapport à l'axe u.
La fonction f est bien sûr regulière en u et en z au sens de Weierstrass:

$$f(0, 0, 0, u) = u^2$$
$$f(0, 0, z, 0) = z^2$$

S'il existait un polynôme P en (z, u) aux coefficiants analytiques en $\lambda = (x, y)$ et une unitè $v(z, u, x, y)$ tel que (1) , alors B serait un ensemble (z, u) - semi- algébrique et u-relativement compact.
Donc, selon le théorème clé cité ci-dessus, sa projection $\pi(B)$sur l'espace (x, y, z) parallèlle à l'axe u serait un ensemble z-localement semi-algébrique.
Or, on a:

$$\pi(B) = A \cap]-M, M[$$

avec A étant l'ensemble (4) et $g(z) = e^z$,
ce qui donne une contradiction.

Rappel Un sous-ensemble E du produit cartesien $M \times N$ des espaces affines s'appelle N- relativement compact si pour tout compact K dans M l'ensemble

$$E \cap (K \times N)$$

est relativement compact dans $M \times N$.

3.Annexe

Lemme de "saucissonnage " de Cohen([1])

Soit $P(x,y)$, avec x dans $\mathbb{R}^n$ et y dans $\mathbb{R}$ un polynôme.
Alors il existe une partition de $\mathbb{R}^n$ en ensembles semi-algébriques $A_1, ..., A_m$ telle que pour chaque i = 1,...,m
ou bien P(x,y) a un signe constant (strictement positif, negatif ou nul) sur A_i
ou bien il existe un nombre fini de fonctions semi-algébriques continues

$$h_1 < ... < h_{k(i)}$$

de A_i dans $\mathbb{R}$ telles que pour tout $x \in A_i$ l'ensemble $\{h_1(x), ..., h_{k(i)}(x)\}$ est l'ensemble des zéros de P(x,y) et que le signe de P(x,y) ne dépends que des signes de $y - h_j$ pour $j = 1, ..., k(i)$.

On va utiliser en fait une certaine généralisation de ce lemme (voir [2]): Soit A un anneau des fonctions sur un espace affine M.
Notons *S(A)* la famille des sous-ensembles de M qui sont décrits par les fonctions de A . Cette famille est toujours stable par le complément, la réunion et l'intersection finies.
Elle est aussi la plus petite famille des sous-ensembles de M stable pour ces opérations et contenant tous les ensembles $\{f > 0\}$.

Lemme

Supposons que A est un sous-anneau de l'anneau des fonctions réelles continues sur M tel que tout ensemble de *S(A)* n'ait que le nombre fini de composantes connexes, toutes dans *S(A)* . Alors pour tout ensemble E décrit par les polynômes en t aux coefficients en A il existe une partition finie J de M en ensembles connexes qui appartiennent à *S(A)* telle que pour chaque $B \in J$ il existent des fonctions continues sur B

$$h_{B,1} < ... < h_{B,k(B)}$$

telles que E est soit une réunion d'ensembles de la forme:

$$\{x \in B : h_{B,i}(x) < t < h_{B,i+1}(x)\}$$

ou bien

$$\{x \in B : t = h_{B,i}(x)\}$$

La démonstration se trouve dans [2] et repose sur l'arrangement des racines complexes d'un polynôme au dessus de l'ensemble où leur nombre est fixe.

Sous les mêmes hypothèses sur l'anneau A que dans le lemme, on obtient alors:
1) chaque ensemble E décrit (au sens (3)) par les polynômes de $A[t]$ n'a que le nombre

fini des composantes connexes, qui sont toutes décrites par les fonctions de $A[t]$ au sens (3).
2) la projection de l'ensemble E ainsi décrit dans $M \times \mathbb{R}$ sur M est dans *S(A)* .
Par récurrence sur le nombre de variables réelles on obtient les résultats 1) et 2) pour $A[t_1, ..., t_n]$.
Avec ce dernier résultat, on démontre directement le théorème clé utilisé pour construire le contre-exemple. On prendra n = dimR et A = les restrictions à notre voisinage U des fonctions analytiques dans l'adhérence de U.

Remarques
Intuitivement, si (1) était vrai pour f regulière en z et en u, on pourrait généraliser ce fait par récurrence et obtenir que tout ensemble semi-analytique est localement semi-algébrique, ce qui est, bien sûr, faux.(Tout ensemble semi-analytique deviendrait alors sous-analytique!)

Le fait me semblant connu, j'ai pris soin de demander l'avis de certains mathématiciens polonais du groupe de S. Lojasiewicz. N'ayant pas obtenu de réponse (ni positive ni négative), j'ai construit cet exemple et je l'ai transmis à Paris VI de manière informelle en février 99.
On m'a d'ailleurs démandé un contre-exemple **concret** au cas où la réponse serait négative.

Remerciements
Merci à Jacek Stasica pour la première lecture de ce texte et les remarques concernant la rédaction et à Tadeusz Mostowski pour l'encouragement à écrire cette note.

References

[1] M. Coste, Ensembles semi-algébriques, Lecture Notes 959, 1982, 109-138
[2] S. Lojasiewicz, Ensembles semi-analytiques preprint IHES 1968
[3] J. Bochnak, M. Coste, M. F. Roy, Géométrie algébrique réelle, Springer Berlin 1987
[4] P.J. Cohen, Decision procedure for real p-adic fields, Commun. Pure and Applied Maths 22, pp 131-151, 1969
[5] J. Bochnak, G. Efroymson, An Introduction to Nash Functions, Lecture Notes 959, 1982
[6] Z. Denkowska, J. Stasica, Ensembles sous-analytiques à la polonaise, preprint 1986